Т.Г.Крамаренко,
м. Кривий Ріг, Жовтневий ліцей

Деякі методичні аспекти розв'язування задач з параметрами

Бурхливий розвиток інформатики та нових інформаційних технологій обумовлюють вдосконалення освітніх технологій, оновлення методичних підходів до здавалось би традиційних математичних задач. Принципово важливою є орієнтація освіти на розвиток творчих здібностей учнів. Специфіка цілей навчання математики полягає не стільки у передаванні різноманітних відомостей, скільки у необхідності навчання розв'язання певних класів задач і розвитку мислення школярів. Через систему вправ, що пропонуються учням, особливо при поглибленому вивченні математики, проходять задачі з параметрами – дослідницькі мініатюри, які сприяють розвитку інтелектуально-логічних здібностей дитини. Задачі вказаного типу вимагають ретельного аналізу та всебічного дослідження їх умов, вони часто зустрічаються на олімпіадах різних рівнів, вступних іспитах до вузів. Інтерес до них не випадковий. Теоретичне вивчення фізичних процесів часто приводить до більш чи менш складних рівнянь та нерівностей, що містять параметри, і необхідною частиною розв'язування таких задач є дослідження характеру процесу в залежності від значень параметра. Згідно з новою програмою тема "Задачі з параметрами" належить до варіативної частини [5], а самими учнями визначається як одна з найскладніших для засвоєння.

Для вирішення дидактичних завдань та активізації дії мотиваційних чинників у створенні позитивного ставлення до навчання при засвоєнні теми можна використати ППЗ GRAN1 або Advanced Grahper. Педагогічний експеримент, що проводився з метою визначення ефективності використання комп'ютерних технологій до розв'язування даного типу задач, засвідчив, що та група учнів, яка крім традиційних підходів в процесі навчання використовувала і прикладні програми для прогнозування розв'язків завдань, в результаті отримала значно вищу якість знань. Користуючись ППЗ GRAN1, учень досить швидко може побудувати на площині геометричне місце точок, які задані рівняннями та нерівностями [4]. Прогнозування розв'язків в задачах з параметрами ґрунтується на тому, що значну кількість таких задач можна розв'язати графічно з побудовою образу в координатній площині (a;x), (x;a) чи (x;y).

Параметр має двоїсту природу – з одного боку це фіксоване, але невідоме число, а з другого – змінна, оскільки саме число невідоме і розглядаємо задачу для всіх можливих значень параметра. Записати кожне рівняння нескінченної множини неможливо, тому намагаються виділити "особливі" значення параметра, їх називають контрольними, при яких і при переході через які відбувається якісна зміна рівняння. При розв'язуванні отримуємо різні "розгалуження". Параметр "керує" пошуком значень змінної.

Двоїста природа параметра обумовлює два основні методи розв'язування – аналітичний та графічний [1,2,3,6]. Для рівнянь та нерівностей з параметрами можна сформулювати деякі загальні положення, дотримання яких дає певні орієнтири в процесі їх розв'язування аналітичним методом: встановлюють ОДЗ змінної, а також ОДЗ параметрів; виражають змінну через параметри; для кожного допустимого значення параметра знаходять множину всіх коренів даного рівняння (розв'язків нерівності); досліджують особливі значення параметра, при яких розв'язки існують, але не виражаються формулами, які дістали.

Щоб не допустити помилки в ході міркувань, по можливості поєднують графічний та аналітичний методи. У залежності від того, яка роль параметру приділяється в задачі (нерівноправна чи рівноправна зі змінною), можна відповідно виділити два основних графічних прийоми: перший – побудова графічного образу на координатній площині (x;y), другий – на (x;a). Здавалося б, така незначна деталь, як відмова від традиційного вибору букв x і y для позначення осей, визначає один з найефективніших методів розв'язування задач з параметрами. При побудові графічного образу в площині (x,a) встановлюють ОДЗ змінної, а також ОДЗ параметрів; виражають параметр *a* як функцію від *x* (при використанні GRAN1 досить вибрати тип "Функція задана неявно"); перетинають отриманий графік прямими, перпендикулярними до параметричної осі і записують потрібну інформацію.

Передбачимо, використовуючи GRAN1, кількість розгалужень в **рівнянні** $\mathbf{x^4-2ax^2-x+a^2-a=0}$ та число розв'язків для кожного значення параметра *a*.

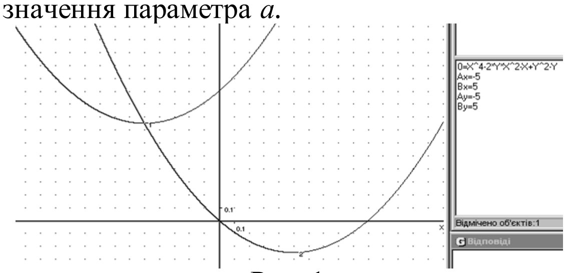

Рис. 1

По осі абсцис відкладаємо змінну x, по осі ординат змінну *a* (неявно виражена функціональна залежність, параметр позначаємо через У). Далі стандартний підхід - проводимо прямі, перпендикулярні осі параметра. Скільки отримаємо точок перетину з графіком, стільки розв'язків матиме рівняння. Аналізуючи графічний образ (Рис.1), можна встановити, що для $a<-0{,}25$ коренів нема; для $-0{,}25<a<0{,}75$ і a=0,75 - два, для $a>0{,}75$ – чотири і для $a=-0{,}25$ – один . Самі ж корені можна знайти лише наближено. Графічний образ рівняння складається з двох парабол, тому учень може зробити висновок, що ліва частина розкладається на множники. Розв'яжемо через параметр: $a^2+a(-2x^2-1)+(x^4-x)=0,$

$a_1=x^2+x+1; a_2=x^2-x\ \ x^2+x+1-a=0;\ D_1=-3+4a;\ \ x^2-x-a=0;\ D_2=1+4a$

1) $a \in (-\infty;-0.25)$, $D_1<0$, $D_2<0$, рівняння немає коренів;

2) $a \in [-0.25;0.75)$, $D_1<0$, $D_2\geq0$, $x_{1,2} = 0.5(-1 \pm \sqrt{1+4a})$;

3) $a \in [0.75;+\infty)$, $D_1\geq0$, $D_2\geq0$, $x_{1,2} = 0.5(-1 \pm \sqrt{1+4a})$, $x_{3,4} = 0.5(-1 \pm \sqrt{-3+4a})$.

Щоб знайти при яких значеннях a рівняння $x^2-2ax+a+1=0$ і $x^2+ax-a-1=0$ мають хоча б один спільний корінь**,** користуються, як правило, аналітичним методом. Погляньмо, які висновки отримуються за допомогою GRAN1. Скориставшись послугою “Координати точки” (Рис.2), знаходимо ординати точок перетину графіків рівнянь (параметрична вісь – вісь ординат): –1; 2; ≈–0,67. При таких значеннях параметра рівняння мають спільний корінь.

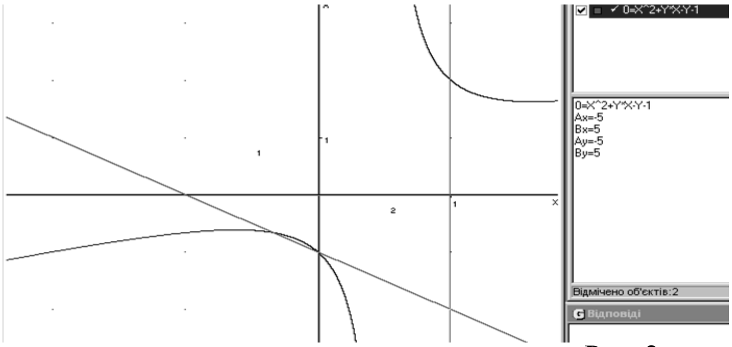

Рис. 2

Крім того, учень відразу може знайти корені другого рівняння x=1 та x=-a-1, оскільки графічним образом є дві прямі, а отриманий результат перевірити за теоремою Вієта. При такому підході до задачі учневі простіше буде навчитися розв’язувати подібні задачі аналітичним методом, отримані результати будуть переконливіші. Користуючись графіком, він зможе відповісти на запитання: При якому значенні параметра спільний корінь рівний 1? Коли він дорівнює 0?; Скільки розв’язків може мати кожне з рівнянь? Чому графічним образом другого рівняння є дві прямі?

Обґрунтовуємо гіпотезу аналітично. Нехай x= α - спільний корінь даних рівнянь. Тоді матимуть місце рівності $\alpha^2 - 2a\alpha + a + 1 = 0$, $\alpha^2 + a\alpha - a - 1 = 0$. Віднімемо від першої рівності другу: $-3a\alpha + 2a + 2 = 0$; $3a\alpha = 2a + 2$; $\alpha = (2a+2)/(3a)$. Якщо a=0, значення α не існує і рівняння спільних коренів не мають. Тому $3a\neq0$ Підставляємо знайдене значення α в одне з даних рівнянь, наприклад у перше: $3a^3 - a^2 - 8a - 4 = 0$ Отримаємо розв’язки: -1; -2/3; 2. Значення a знайшли, припускаючи, що дані рівняння мають спільний корінь, тому необхідно зробити перевірку.

Розв’язуючи задачу на визначення, *при якому значенні параметра m корені рівняння* $4x^2-(3m+1)x+m-2=0$ *знаходяться між числами 0 і 2,* встановлюємо, що умову задачі задовольняють ті значення параметра, для яких обидві криві знаходяться в смузі 0<x<2 і тоді $m \in (2;2,4)$.Обґрунтовуємо використовуючи каркас квадратичної функції і приходимо до системи: $D \geq 0, f(0) > 0, f(2) > 0, 0 < -b/2a < 2$ для $f(x) = sx^2 + bx + c$.

Для передбачення розв’язків нерівностей спочатку будують графічний образ рівняння G(x,y)=0, а потім використовують послугу “Розв’язати нерівність G(x,y)>0”.

Здійснимо з використанням GRAN1 передбачення розв’язків нерівності, що традиційно розв’язується аналітично: $x^2(x^2-2a)+4a<x^2(4-a)$. Спочатку розглядають рівняння $x^2(4-a) - x^2(x^2-2a) - 4a = 0$, (Рис.3). Якщо за параметричну вісь обрати вісь абсцис (x позначити через y, параметр через x), то отримаємо повніші відомості. Щоб впевнитися, яку саме криву зображено, додатково будуємо в цій же системі координат графік функції $y = \sqrt{x}$ Криві співпадають. Використовуємо послугу “Розв’язати нерівність G(x,y)>0”. Проводимо вертикальні прямі, перпендикулярні параметричній осі, враховуючи, що нерівність строга, записуємо її розв’язки.. Якщо a<0, x є (-2;2); $0\leq a<4$, то xє(-2;-$\sqrt{a}$)U($\sqrt{a}$;2); для a=4 немає розв’язків; якщо a>4, то xє(-$\sqrt{a}$;-2)U(2; $\sqrt{a}$). На основі графічного образу знову пропонуємо учням самостійно скласти задачу, що сприятиме удосконаленню навичок аналізу та узагальнення: При яких значеннях параметра множині розв’язків належить відрізок [3;4], коли $|x| > 2$, $|x| > 3$ та інші. З використанням GRAN1 учні елементарно встановлюють, що при значеннях параметра $a \geq 1$ нерівність $a4^x - 4\cdot2^x + 3a + 1 \geq 0$ виконується для всіх x**,** тоді як обґрунтування зводиться до знаходження з використанням похідної найбільшого значення функції $f(x) = (4\cdot2^x - 1)/(4^x + 3)$.

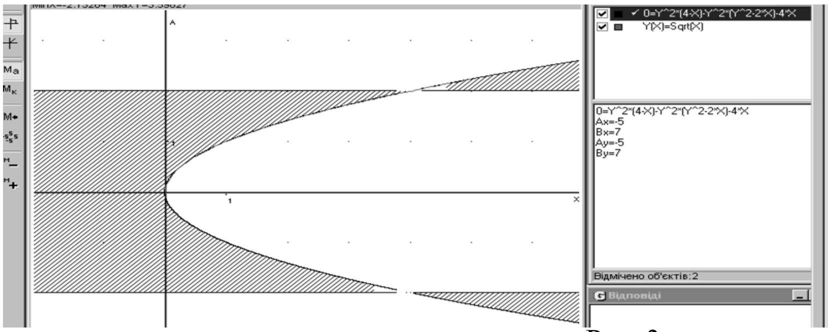

Рис. 3

Нерівність $\log_{\frac{1}{x}}(a-x) < 1$ рекомендується розв'язувати графічно з побудовою в площині (x, a) [1]. Тому картинка, яку виконаємо від руки, буде такою ж, як і з використанням GRAN1.

Розглянуті вище приклади стосувались побудови графічних образів в GRAN1 в координатних площинах (a,x) чи (x,a), але так само успішно можна досліджувати і в площині (x,y). Тут параметр виступає як нерівноправна змінна. Змінюється підхід до дослідження, доводиться будувати параметричну сім'ю кривих. Досить часто при розв'язуванні задач з параметрами за методом перерізів для побудови графіків учням доводиться застосовувати похідну. Труднощі в таких задачах можуть виникнути і при обчисленні границь функції. Саме тоді в нагоді стає комп'ютер, використання якого вчить учня правильно враховувати властивості функцій [4].

Для прикладу наведемо задачі: При яких значеннях параметра а нерівність $\sqrt{1-x^2} > a-x$ має розв'язки; скільки розв'язків має рівняння $e^{1/x} = a/x^2$ в залежності від a? Для останньої задачі в одній системі координат (Х,У) будуємо графіки функцій $y = x^2 e^{1/x}$ та $y = a$. Друге рівняння задає прямі, паралельні осі абсцис В GRAN1 отримуємо для аналізу рисунок (Рис.4) і виходимо на результат.

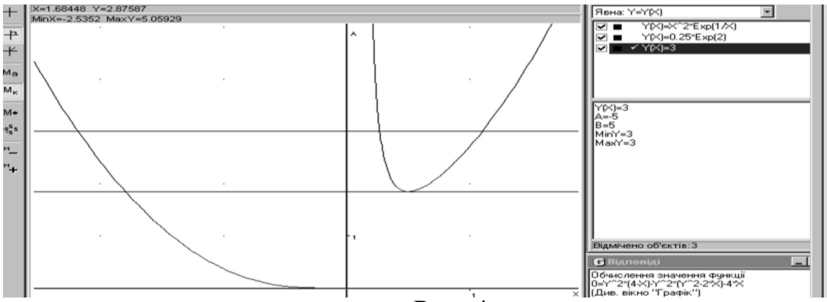

Рис. 4

Нерівність $\sqrt{x+a} > x+1$ бажано б було розв'язати з використанням обох графічних прийомів, щоб учні могли краще усвідомити їх суть, спільне та відмінності (побудова в системі (x,y)) на рис. 5, в (x,a) на рис. 6.

В одній системі координат (x,y) будуємо графіки функцій $y = x+1$ та $y = \sqrt{x+a}$ для різних значень параметра а. Для кожного значення а нерівність задовольняють ті значення змінної, для яких графік функції $y = x+1$ знаходиться нижче графіка функції $y = \sqrt{x+a}$.

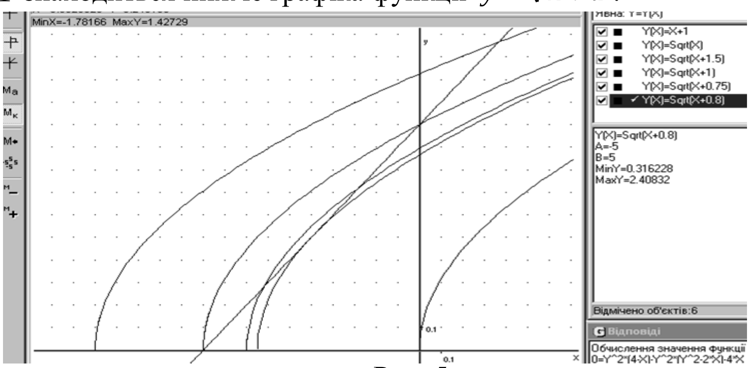

Рис. 5

При графічному підході з побудовою в (x,a) "вручну", від нерівності переходять до рівносильної сукупності систем і в результаті виходять на побудову графіка функції a=x^2+x+1.

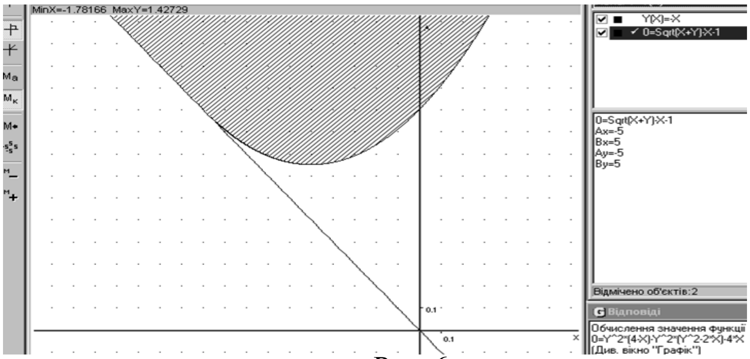

Рис. 6

Отримаємо, якщо $a \le 0.75$, то $\varnothing$, якщо $0.75 < a \le 1$, тоді розв'язуємо рівняння $a = x^2 + x + 1$ відносно змінної x, $x \epsilon (x_1, x_2)$,якщо $a > 1$, $x \epsilon (-a; x_2)$, де $x_1 = 0{,}5(-1 - \sqrt{4a-3})$, $x_2 = 0{,}5(-1 + \sqrt{4a-3})$.

Застосування програми GRAN1 розширює клас функцій, графіки яких учні можуть побудувати. Варто звернути увагу на особливості побудови графіків цілої частини функції $y=[f(x)]$ та дробової $y=\{f(x)\}$ в програмі GRAN1 (див. Windows-версії 2004, режим побудови за точками). Графічний метод перетворює процес розв'язування з формально-арифметичного в наочно-геометричний, сприяє тому, щоб учень краще засвоїв тему.

Застосування GRAN1 часто полегшує процес побудови "вручну" графічного образу, допомагає знайти розв'язки задач або їх вигляд, встановити кількість розгалужень, сприяє розвитку логічного мислення, пошуку нестандартних підходів при розв'язуванні задач, удосконалює самоконтроль. Програму можна застосувати до багатьох задач, що традиційно розв'язуються аналітичним методом. Варто запропонувати дітям самостійно скласти і розв'язати нові задачі, використовуючи готові графічні образи, що сприятиме розвитку їх творчих здібностей. З іншого боку, застосування програми GRAN1 допомагає вирішувати проблему гуманізації освіти - робить задачі з параметрами більш доступними кожному, хто має хоча б елементарні навички роботи з комп'ютером, створює умови для самовираження внутрішніх потенціальних можливостей учня, дозволяє дитині досягти успіху, навіть якщо вона й не знає деяких теоретичних положень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вишенський та ін. Збірник задач з математики: Навч. Посібник/ В.А.Вишенський, М.О.Перестюк, А.М.Самойленко. - 2-е вид., доп.-К. : Либідь, 1993.- 344 с.
2. Гайштут А.Г., Литвиненко Г.Н. Алгебра. Решение задач и упражнений. Учебное издание. – К.: «Магистр-S", 1997. – 256 с.
3. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. – К: РИА "Текст", МП "Око", 1992.-290 с.
4. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. – К.: Техніка, 1997. – 303 с.
5. Програма для класів з поглибленим вивченням математики 8-11 класи. К.: "Шкільний світ", № 37(145), жовтень, 2001
6. 1.Шкіль М.І., Колесник Т.В., Хмара Т.М. Алгебра і початки аналізу. Підручник для учнів 10 класу з поглибленим вивченням математики в середніх закладах освіти. К.: Освіта,2000.-318 с.

Шиман О.І.