

### Особливості розв'язування задач з геометрії чотирикутника з використанням програми "GRAN-2D"

Перебудова шкільної геометричної освіти вимагає пошуку нових методичних технологій, які б забезпечили поряд з високим рівнем теоретичної і практичної підготовки з математики переорієнтацію навчально-виховного процесу на особистість учня, сприятливі умови для досягнення кожним учнем обраного рівня знань. Серйозного удосконалення потребує методика формування системи задач шкільного курсу геометрії, оскільки добір завдань, поданий в діючих підручниках, нерідко не враховує зміст та основні ідеї Концепції шкільної математичної освіти та Державного стандарту загальної середньої математичної освіти в Україні. При цьому багато вчителів і методистів покладають надії на використання сучасних інформаційних технологій (СІТ).

Педагогічні і теоретичні аспекти використання сучасних інформаційних технологій у навчальному процесі досліджені у працях М.І. Жалдака, Ю.С. Рамського, С.А. Ракова, В.І. Клочка, Ю.І. Машбиця, Н.В. Морзе, А.В. Пенькова, Ю.В. Горошка, В.В. Дровозюка, О.Б. Жильцова, А.Г. Олійника, М.С. Голованя, Ю.О. Жука, Б.Б. Беседіна, І.М. Забари та ін.

Проте значною перешкодою до широкого впровадження і ефективного використання засобів ІКТ в навчальному процесі, якомога швидкого створення і поширення ППЗ, розробки нових комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання, які органічно поєднують традиційні методичні системи і сучасні засоби організації і забезпечення інформаційних процесів, стосовних до навчання і виховання дітей, є майже повна відсутність відповідного комп'ютерно-орієнтованого навчально-методичного забезпечення, що стримує інформатизацію навчального процесу і значно знижує ефективність використання ІКТ в навчальній діяльності, заважає якомога швидше і повніше розкрити педагогічний потенціал інформатизації методичної системи підготовки і роботи вчителя та забезпечення навчально-пізнавальної діяльності учнів.

На сьогодні розроблено значну кількість програмних засобів, що дозволяють розв'язувати за допомогою комп'ютера досить широке коло математичних задач різних рівнів складності, які розраховані на учнів середніх навчальних закладів. Вони дають можливість учневі розв'язувати окремі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату, методів і формул, правил перетворення виразів, тощо.

Однією з таких програм є програма GRAN-2D. Вона проста у користуванні, оснащена досить зручним інтерфейсом, максимально наближеним до інтерфейсу найбільш поширених програм загального користування. Від користувача не вимагається значного обсягу спеціальних знань з інформатики, основ обчислювальної техніки, програмування, тощо, за винятком найпростіших понять, які цілком доступні для учнів середніх класів загальноосвітніх шкіл.

Використання програми GRAN2, завдяки можливостям комп'ютерного супроводу графічних побудов, дозволяє розв'язувати геометричні розрахункові задачі, причому розв'язування цих задач стає настільки доступним, як і просте розглядання малюнків. Покажемо це на прикладі розв'язання наступної задачі.

**ЗАДАЧА 1.** Знайти радіус кола, описаного навколо рівнобедреної трапеції з основами 21 і 9 см і висотою 8 см.

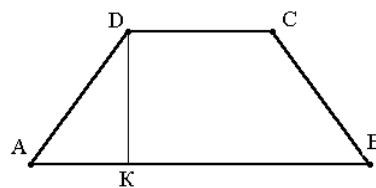


Рис. 1.

Зауважимо, що для учня середньої школи це не проста задача. При використанні формули  $R = \frac{abc}{2S}$  (де  $a, b, c$  – сторони трикутника ABC), йому необхідно виконати чимало непростих числень, застосовуючи властивості рівнобедреної трапеції, теорему Піфагора, формулу для обчислення площі трикутника, тощо. Та і пригадати формулу  $R = \frac{abc}{2S}$  без допомоги вчителя не кожний зможе. При використанні програми GRAN2 учні можуть розв'язати цю задачу, навіть не знаючи відповідного аналітичного матеріалу.

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.** Якщо рівнобедрену трапецію ABCD розмістити так, щоб точка А співпала з початком відліку системи координат (її координати  $x = 0; y = 0$ ), а точка В лежала на осі  $Ox$  (її координати  $x = 21; y = 0$ ), тоді координати точок С і D відносно осі  $Oy$  матимуть значення, рівні висоті трапеції, тобто 8. Координати цих точок відносно осі  $Ox$  легко визначити, виходячи з властивостей рівнобедреної трапеції ( $AD = BC, \angle A = \angle B$ ). Для цього достатньо знайти величину відрізка  $AK = \frac{AB - DC}{2} = 6$  см.

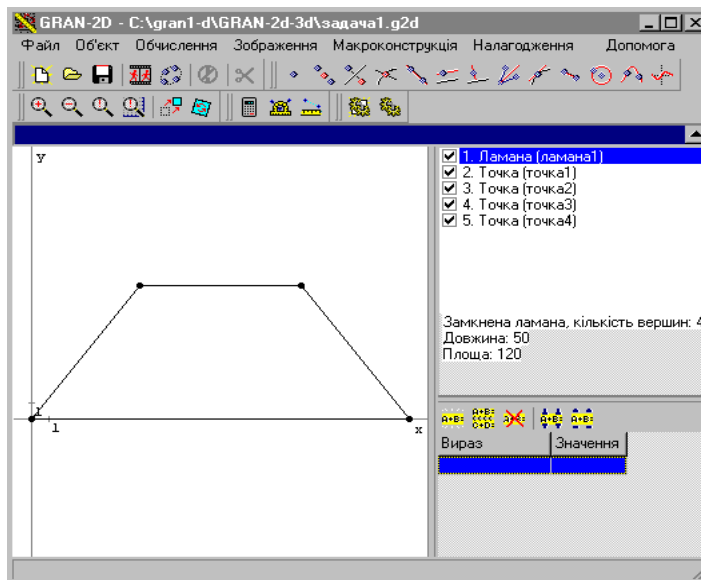


Рис. 2.

Матимемо для точки D:  $x = 6$ ;  $y = 8$ , а для точки C:  $x = 15$ ;  $y = 8$ .

Вибираємо підпункт “Ламана” та у вікні “Конструювання об’єкта”, що з’являється, вказуємо координати вершин трапеції (координати точок A, B, C, D) та параметри зображення. Натискаємо на кнопку “Застосувати” і отримуємо зображення трапеції, що нас цікавить (див. рис. 2).

Для побудови кола, описаного навколо рівнобедреної трапеції, використовуємо пункт головного меню “Макроконструкція”. В ньому вибираємо підпункт “Встановити”, після чого з’являється вікно “Встановлення макроконструкції”. В ньому вибираємо послугу “Коло через три точки” та натискаємо на кнопку “Встановити”. Після цього програма запрошує вказати три точки, через які має пройти коло. По черзі підводимо курсор в кожен з трьох обраних точок, вершин трапеції, натискаючи щораз на ліву кнопку “мишки”. В результаті на екрані з’являється зображення, подане на рисунку 3.

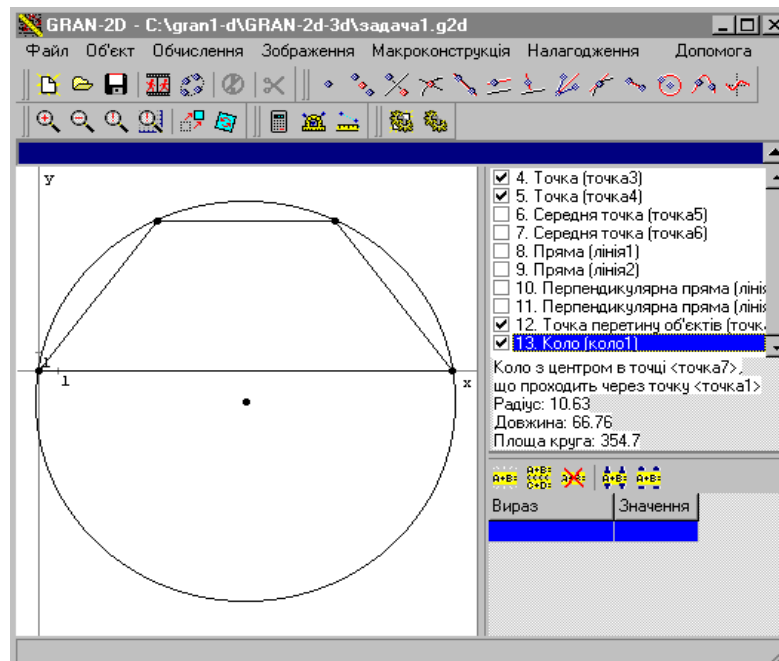


Рис. 3.

При цьому програма автоматично виконує всі технологічні операції стосовно знаходження центра кола: встановлює середини двох відповідних сторін трапеції, будує серединні перпендикуляри до цих сторін, встановлює точку перетину цих перпендикулярів – центр шуканого кола. Весь цей процес залишився схованим. На екрані лише з’явилася точка – центр кола, та саме коло. З правої сторони на екрані можна спостерігати повідомлення, яке вказує на значення радіуса та довжину кола, а також площу круга, обмеженого цим колом. Нас цікавить значення радіуса:  $R = 10,63$  см. Задачу розв’язано.

**ЗАДАЧА 2.** Нижня основа  $AB$  трапеції  $ABCD$  дорівнює 10 см. Верхню основу цієї трапеції  $CD$  з вершини  $A$  видно під кутом  $\alpha = 15^\circ$ , а з вершини  $B$  – під кутом  $\beta = 10^\circ$ . Знайти висоту трапеції  $ABCD$  та її площу.

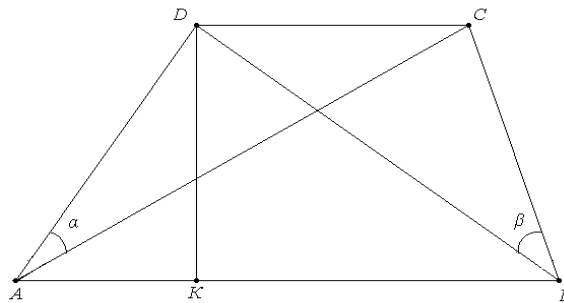


Рис. 4.

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.** За допомогою програми GRAN 2D легко отримати відповідь до цієї задачі. Для цього потрібно виконати наступні дії:

- 1) будемо екранне зображення точки спостереження A з координатами  $x = 0, y = 0$  (послуга пункту меню *Об'єкт \ Створити \ Точка*);
- 2) будемо екранне зображення точки B з координатами  $x = 5, y = 0$ ;
- 3) будемо екранне зображення *вільної* точки C з довільними координатами та точки D (координата вздовж осі Oy має бути такою ж як і для точки C);
- 4) будемо екранне зображення відрізка CD;
- 5) будемо екранне зображення прямих AC та AD (послуга пункту меню *Об'єкт \ Створити \ Пряма, що проходить через дві задані точки*) та прямих BC та BD;
- 6) виводимо на екран значення кутів DAC та DBC (послуга *Обчислення \ Кут* після вказування трьох точок, автоматично отримуємо екранне зображення значення кута між прямими, що проходять відповідно через першу і другу та другу і третю точки у вигляді дуги, що сполучає сторони кута);
- 7) встановлюємо курсор на відрізок CD і за допомогою мишки „перетягуємо” його в положення, для якого значення кутів DAC та DBC відповідно дорівнюватимуть  $15^\circ$  та  $10^\circ$  (під час переміщення відрізка CD на координатній площині видимі на екрані значення кутів DAC та DBC автоматично змінюються);
- 8) будемо екранне зображення висоти CE (послуга пункту меню *Об'єкт \ Створити \ Створення перпендикулярної прямої*);

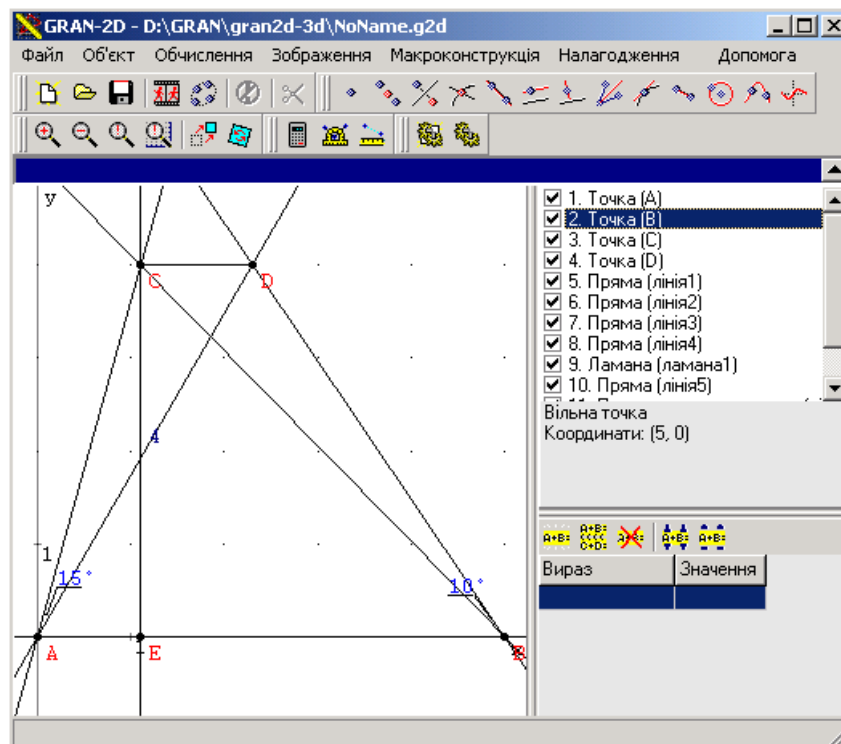


Рис. 5

9) обчислюємо відстань між точками C і E, для чого звернемося до послуги *Обчислення \ Відстань* та за відповідними запитами програми (що з'являться у *полі підказки*), послідовно вказавши на зображення двох точок, отримуємо результати обчислення відстані у *полі зображення* між цими точками. Відповідь:  $CE = 4$  см.

На рис. 5 подано зображення вікна програми GRAN-2D з розв'язком даної задачі.

**ЗАДАЧА 3.** У чотирикутнику ABCD з шести відрізків AB, AC, AD, BC, BD, CD не більше, ніж один, має довжину більшу за 10. Яку максимальну величину може мати сума  $AB+AC+AD+BC+BD+CD$

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.** Будемо розглядати саме той випадок, коли один з відрізків більший за 10. Нехай це буде відрізок AC. Також необхідно врахувати, що

$$AC < AB + BC \leq 20.$$

Якщо побудувати два круга з центрами в точках A і C радіуса  $R=10$ , тоді точки B і D повинні лежати в перерізі цих кругів (рис. 6).

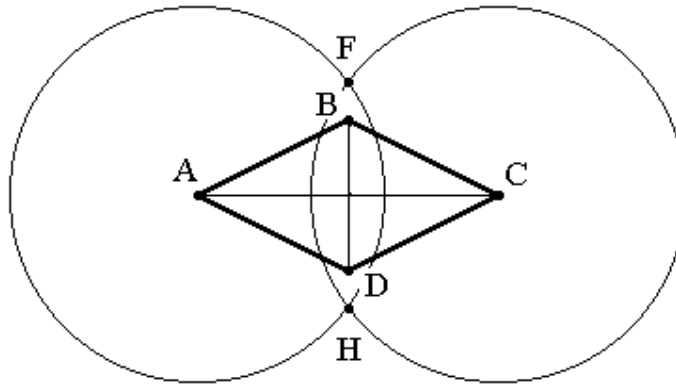


Рис. 6

В цьому випадку величини відрізків  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  задовільнятимуть умову задачі:  $AB \leq 10$ ,  $BC \leq 10$ ,  $CD \leq 10$ ,  $DA \leq 10$ . Зрозуміло, що свого максимального значення ці відрізки набуватимуть за умови, коли точка  $B$  співпадає з точкою  $F$ , а точка  $D$  з точкою  $H$ . В цьому випадку  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  є вершинами ромба зі стороною, рівною 10. Залишається знайти максимальне значення суми діагоналей цього ромба, враховуючи, що  $BD \leq 10$ . Використаємо для цього програму GRAN-2D. Дії з використанням комп'ютера виконуємо в наступній послідовності:

1. Створюємо точки  $A(0;0)$  та  $C(x;0)$ .  
 "Об'єкт"  $\Rightarrow$  "Створити"  $\Rightarrow$  "Точка"  $\Rightarrow$  "Конструювання об'єкта". Координата точки  $C$  має задовільняти нерівність  $10 \leq x \leq 20$ , тому обирається довільно ( $x = 16$ ).
  2. Будуємо два кола з центрами в точках  $A$  і  $C$ . Для цього спочатку будуємо ще дві точки, які лежатимуть на осі  $Ox$ , відстань від яких до точок  $A$  і  $C$  відповідно дорівнюватиме 10:  $(-10;0)$ ,  $(26;0)$ .  
 "Об'єкт"  $\Rightarrow$  "Створити"  $\Rightarrow$  "Коло"  $\Rightarrow$  "Конструювання об'єкта".
  3. Створюємо точки перетину цих кіл (точки  $B$  і  $D$ ). Щоб прискорити цей процес, потрібно на панелі інструментів за допомогою покажчика (стрілки) відшукати позначку, що відповідає послугі "Точка перетину об'єктів" та натиснути на ліву кнопку "миші". Програма запропонує вказати об'єкти, які перетинаються. Для цього достатньо по черзі навести курсор на кожне з двох кіл та натиснути на ліву кнопку "миші".
  4. Будуємо ромб  $ABCD$ . Встановлюємо курсор на позначку, що відповідає послугі "Ламана" та натискаємо на ліву кнопку "миші". Програма запропонує вказати точки для створення ламаної. Для цього достатньо по черзі навести курсор на кожну з точок  $A$   $B$   $C$   $D$  та натиснути на ліву кнопку "миші". Після цього з'являється вікно "Конструювання об'єкта" з вказаними координатами цих точок. Потрібно не забути при встановленні параметрів ламаної встановити "прапорець" біля запису "Замкнена".
  5. Будуємо діагоналі ромба  $ABCD$ . Для цього:
    - а) Створюємо пряму, що проходить через точки  $A$  і  $C$ . Вибираємо позначку, що відповідає послугі "Пряма, що проходить через дві дані точки". По черзі наводимо курсор на кожну з точок  $A$  і  $C$  та натискаємо ліву кнопку "миші".
    - б) Створюємо точку, яка лежить посередині між точками  $A$  і  $C$ . Вибираємо позначку, що відповідає послугі "Серединна точка". По черзі наводимо курсор на кожну з точок  $A$  і  $C$  та натискаємо ліву кнопку "миші".
    - в) Через середину відрізка  $AC$  проводимо перпендикуляр до прямої  $AC$ . Вибираємо позначку, що відповідає послугі "Пряма, перпендикулярна до заданої прямої". По черзі наводимо курсор на серединну точку та на пряму  $AC$  і натискаємо ліву кнопку "миші".
- Використання програми GRAN-2D дає можливість показувати біля зображення об'єктів числові значення величин відрізків та кутів (пункт меню "Обчислення"). Використавши вказану можливість, виведемо на екран значення довжин половин діагоналей ромба та значення кута  $\angle BAC$ .

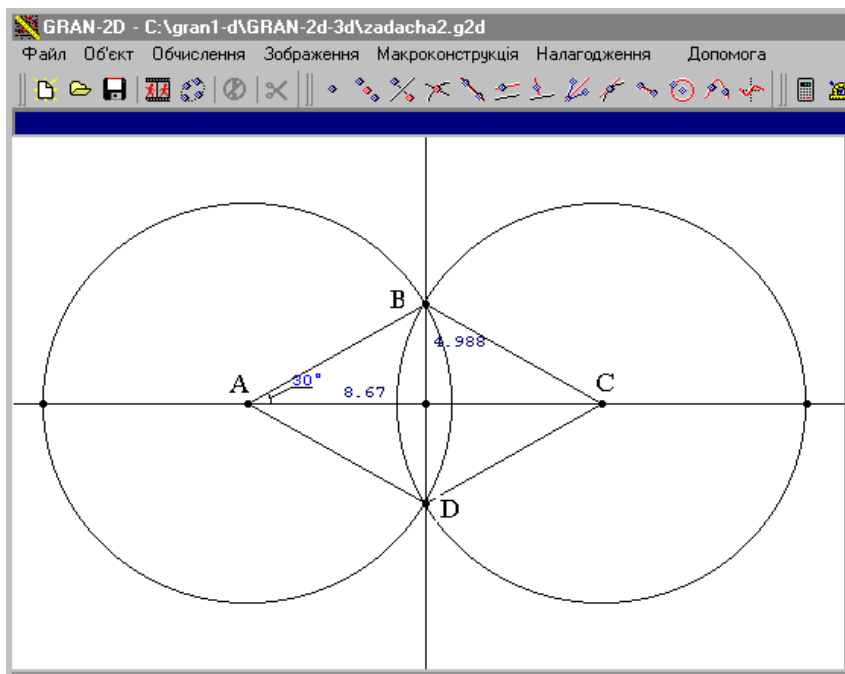


Рис. 7

Надзвичайно ефективною є можливість за допомогою програми GRAN-2D переміщувати зображення об'єктів безпосередньо на екрані. Навівши курсор на коло, натиснувши ліву кнопку “миші” не відпускаючи її, але рухаючи курсор, можна перемістити зображення даного кола в інше місце на екрані. При цьому змінюють своє положення точки перетину кіл, а отже і довжини діагоналей ромба. Також змінюються відповідно числові значення кута  $\angle BAC$  і половин діагоналей. Якщо переміщувати коло таким чином, щоб його центр весь час знаходився на осі  $Ox$  та слідкувати за тим, щоб половина діагоналі  $BD$  не була більшою 5 (згідно умови  $BD \leq 10$ ), дослідним шляхом можна встановити, при якій умові сума діагоналей буде найбільшою. На рисунку 7 показано саме таку умову:  $\angle BAC = 30^\circ$ ,  $BD = 2 * 4,988 = 9,976 \approx 10$ ,  $AC = 2 * 8,67 = 17,34$ .

Отже:  $AB+AC+AD+BC+BD+CD \approx 40 + 10 + 17,34 \approx 67,34$ . *Задачу розв'язано.*

Використання програми GRAN-2D дає можливість учневі розв'язувати окремі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату, методів і формул тощо. Завдяки цьому матеріал окремих розділів геометрії, її методи стають доступними, легкими, зрозумілими і зручними для переважної більшості учнів. Учителю при цьому має можливість більше часу приділити постановці задачі, з'ясуванню проблеми, плануванню дій учнів, матеріальній інтерпретації отриманих за допомогою комп'ютера результатів. При подальшій роботі учня з програмою створюється навчальна ситуація, коли учень може сам впливати на об'єкт ( модель), змінюючи, наприклад дані задачі.. Він сам починає визначати шлях розв'язування задачі за допомогою комп'ютера, збирати та аналізувати дані, синтезувати нові знання, а не отримувати їх в готовому вигляді. Використання подібних програм в навчальному процесі змінюють зміст і структуру навчальної діяльності учнів. При цьому комп'ютерна підтримка процесу розв'язування задач з геометрії дає значний педагогічний ефект.

#### ЛІТЕРАТУРА:

1. Державна національна програма “Освіта” (“Україна XXI століття”) // Освіта. – 1993. – № 44-45-46. – С.2.
2. Жалдак М.І., Вітюк О.В. Комп'ютер на уроках геометрії: Посібник для вчителів. - Київ, РННЦ “ДНІТ”, 2003. – 168с.
3. Жалдак М.І. Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики.// Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: 36. наук. праць - К.:НПУ ім. М.П. Драгоманова. - Випуск 7. - 2003. - 263 с.