Д.А. Покришень
Чернігівський державний технологічний університет

Навчання інформаційних технологій при розв'язуванні математичних задач з параметрами

Сьогодення неможливо уявити без широкого використання інформаційних технологій у всіх сферах людської діяльності, в тому числі при вивченні різноманітних дисциплін у школі та вузі.

До інформаційних технологій навчання [ІТН] можна віднести педагогічний програмний засіб [ППЗ] **«GRAN 1».** Слід зазначити, що його вивчення на уроках інформатики можна поєднати з вивченням певних тем інших дисциплін, наприклад, математики та фізики. Використання **«GRAN 1»** впливає на формування та розвиток в учнів нешаблонності та оригінальності мислення, математичної інтуїції, дозволяє значно підвищити рівень інформаційної культури учнів, що виявляється в чіткому розумінні меж використання комп'ютера при розв'язуванні задач, отриманні навичок, планування своєї діяльності, відповідальності у прийнятті рішень, вмінні оцінювати отримані результати. Методика вивчення, використання ППЗ **«GRAN 1»,** вплив на формування та розвиток продуктивного мислення учнів шляхом візуалізації абстрактних величин розглядається в роботах М.І. Жалдака [3], Ю.В. Горошко [2] , С.П. Семенця [4], І.Л. Семещука [5], Є.Ф. Вінниченко [1].

Щоб більш широко розкрити потенціал використання в навчальному процесі даного ППЗ, при його вивченні слід розглядати не тільки найпростіші задачі, але і більш складні, такі, як задачі з параметрами, розв'язування яких завжди було проблемою для школярів та студентів.

Звернемо увагу на використання даного ППЗ до розв'язування математичних задач з параметрами графічними методами.

I. Координатна площина (y;a).

Суть даного методу полягає у виділенні для параметру окремої координатної осі. Оскільки параметр рівноправний із змінними, тому йому можна виділити будь яку вісь. Під даний метод підходять задачі, в умові яких фігурують параметр **a** та одна змінна. Графіки рівнянь G(y,a)=0 та F(x,a)=0 у системах (y,a) та (x,a) відповідно побудувати не важко.

Задача. *Визначити, при яких значеннях параметра* ***a*** *рівняння* $2^{0,5a+1}x^2 - x^4 = y^2 - 2y\sqrt{a} + 6$ *має розв'язки.*

Розв'язування. При наявності двох змінних може здатися, що в даному прикладі неможливо скористатися цим методом. Але після нескладних перетворень можемо позбавитися однієї змінної. Перенесемо все в ліву частину. Тоді рівняння виду G(y,x,a)=0 $y^2 - 2y\sqrt{a} - (2^{0,5a+1}x^2 - 6 - x^4) = 0$. А отже

$\frac{D}{4} = a - x^4 + 2\cdot 2^{0,5a}x^2 - 6 \geq 0$; $x^4 - 2\cdot 2^{0,5a}x^2 + 6 - a \leq 0$;

$\frac{D_1}{4} = \left(2^{0,5a}\right)^2 - 6 + a > 0$; $\frac{D_1}{4} = 2^a + a - 6 > 0$; $2^a > -a + 6$.

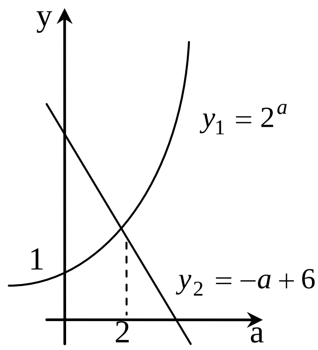

Рис.1.1.

Перейдемо до системи $\begin{cases} y_1 = 2^a \\ y_2 = -a + 6 \end{cases}$. Ця система на координатній площині **(y;a)** задає криву та пряму зображені на рисунку 1.1. Розв'язком цієї системи буде **a**=2. І відповідно $y_1 > y_2$ при $a > 2$.

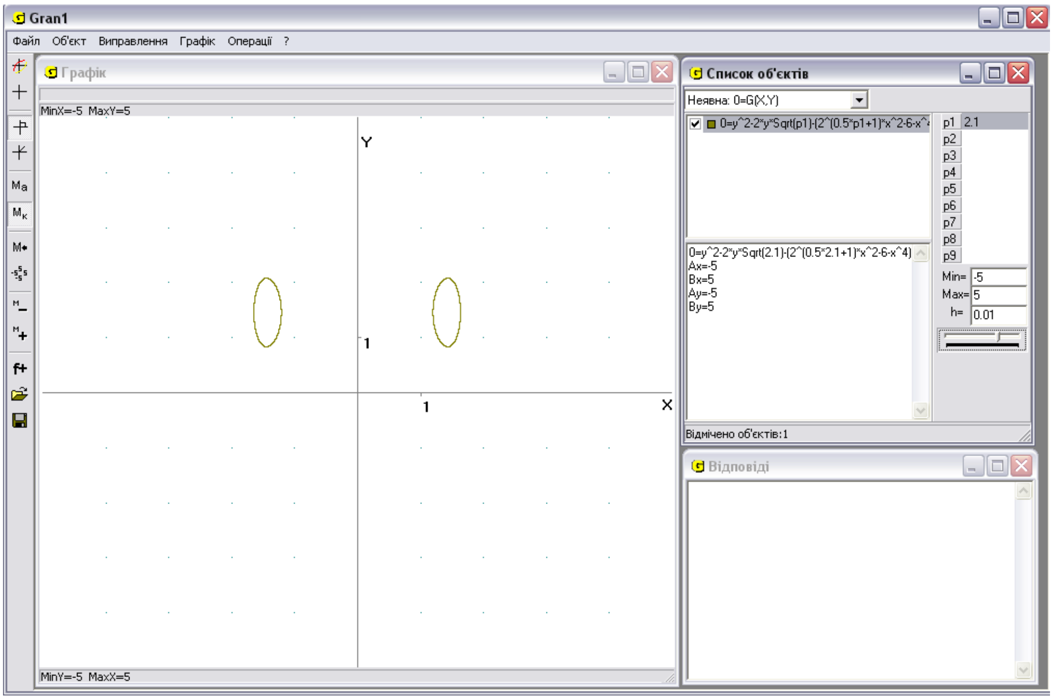

Рисунок 1.2

Відповідь. При $a > 2$ рівняння має розв'язки.

Розв'язування з використанням ІТН.

Перетворюємо рівняння до виду G(y,x,a)=0 . Отже рівняння набуває вигляду $y^2 - 2y\sqrt{a} - (2^{0,5a+1}x^2 - 6 - x^4) = 0$. У списку об'єктів вибираємо „Неявна : 0=G(X,Y)". Викликаємо контекстне меню та вибираємо команду „Створити". У вікні, що з'явилося у рядок **0=** вводимо вираз : y^2-2*y*Sqrt(p1)-(2^(0.5*p1+1)*x^2-6-x^4), де **p1** – параметр **a**. Встановлюємо **Min=-5**, **Max=5** та крок зміни параметра **h=0.1**. За допомогою повзунка змінюємо значення параметра та спостерігаємо за графіком (рис.1.2). Можна побачити, що при значеннях параметра **p1<2** графік зникає, що вказує на відсутність розв'язків для таких значень параметра.

Відповідь. При $a > 2$ рівняння має розв'язки.

II. Координатна площина (y;x).

Даний метод характерний побудовою графіків функцій $y = f(x,a)$ на площині (y;x). Дана функція задає сімейство кривих з певними властивостями. Розглянемо методи перетворення площини, яке дозволить перейти від однієї кривої до будь-якої іншої кривої сімейства.

1) Паралельне перенесення

Задача. *При якому значенні параметра **a** система рівнянь* $\begin{cases} y = -x^2 - 4x + 6 \\ y = x^2 - x - 3 \\ y = -2{,}5x + a \end{cases}$ *має два розв'язки?*

Розв'язування. Графіки функцій $y = -x^2 - 4x + 6$ та $y = x^2 - x - 3$ подано на рисунку2.1.1 . Очевидно система має два розв'язки в точках перетину цих графіків. Добудовуємо графік функції $y = -2{,}5x + a$, де через параметр **a** визначається за переміщення прямої вздовж осі Оу. За рисунком 2.1.1 легко отримати значення для параметра, при якому виконується умова задачі.

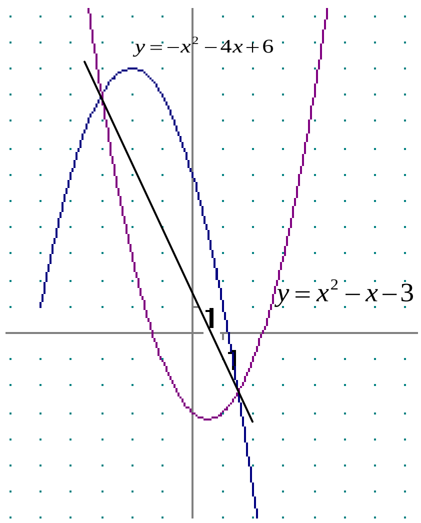

Рисунок 2.1.1

Відповідь. При **a=1,5** система має два розв'язки.

Розв'язування з використанням ІТН.

Для розв'язання даної задачі використовуємо той самий метод. Створюємо три об'єкти $y = -x^2 - 4x + 6$, $y = x^2 - x - 3$ та $y = -2{,}5x + p1$, де **p1** відповідає значенню параметра **a**. Встановлюємо **Min=-5**, **Max=5** та крок параметра **h=0.1.** Змінюючи значення параметра **p1** спостерігаємо за графіком (рисунок 2.1.2). При **p1=1,5** графіки всіх функцій перетинаються в двох точках **x=1,5** та **x=-3.**

Відповідь. При **a=1,5** система має два розв'язки.

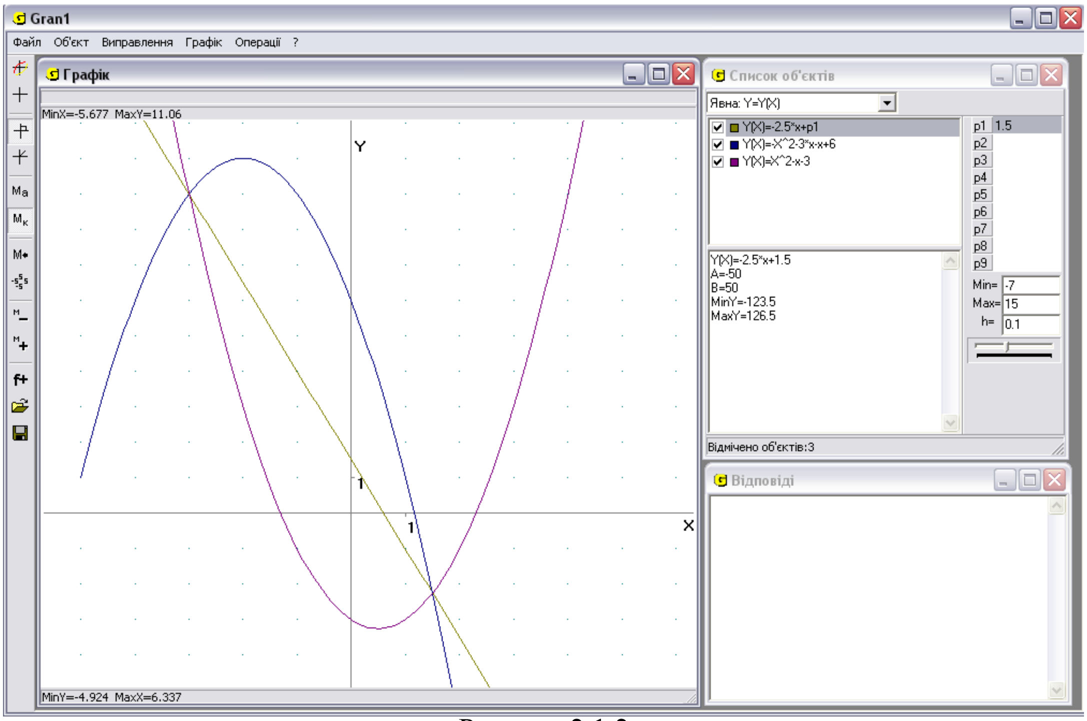

Рисунок 2.1.2

2) Поворот

Задача. *При яких значеннях параметра **а** існує таке **к**, що рівняння* $\left||x-2|-2x+1\right| = kx+a$ *має рівно три розв'язки?*

Розв'язування. Розглянемо функції $y_1 = \left||x-2|-2x+1\right|$ та $y_2 = kx+a$. Графік першої функції легко побудувати, розглянувши системи

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2 \\ y = |x-2-2x-1| \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ y = |-x+2-2x+1| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2 \\ y = |-x-1| \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ y = |-3x+3| \end{cases} \end{array}\right. \quad (2.2).$$

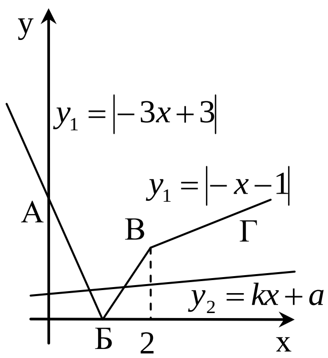

Рис. 2.2.1

На рисунку 2.2.1 показано розв'язок даної системи. У рівнянні $y_2 = kx+a$, **к** – кут нахилу прямої, **а** – зміщення прямої вздовж осі Оу відносно центра координат. Очевидно, рівняння має три розв'язки, якщо пряма $y_2 = kx+a$ перетинає y_1 в трьох місцях, а це можливо, коли $1<k<3$ та $-3<a<1$.

Відповідь. При $-3<a<1$ існують такі $1<k<3$, при яких рівняння має рівно три розв'язки.

Розв'язування з використанням ІТН.

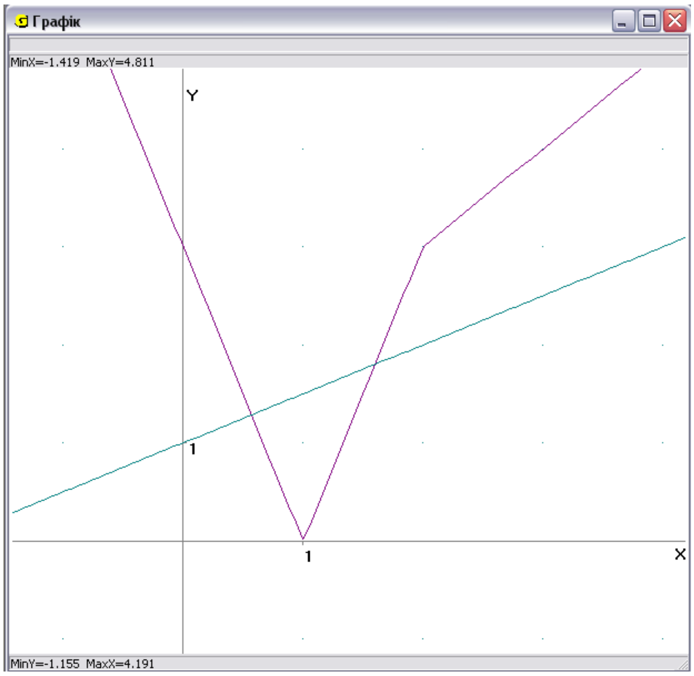

Рисунок 2.2.2

Розглянемо функції $y_1 = \left| |x-2| - 2x + 1 \right|$ та $y_2 = kx + a$. У списку об'єктів вибираємо „Явна : Y=Y(X)". Створюємо два об'єкти з функціями y_1=Abs(Abs(x-2)-2*x+1) та y_2=p1*x+p2, де **p1** – відповідає **к**, та **p2** – відповідає **a**. Змінюючи значення **p1** та **p2** спостерігаємо за графіками. Графік функції y_2 перетинає графік функції y_1 тричі при зміні параметрів $1 < p1 < 3$ та $-3 < p2 < 1$.

Відповідь. При $-3 < a < 1$ існують такі $1 < k < 3$, при яких рівняння має рівно три розв'язки.

3) Гомотетія

Задача. *При яких* ***a*** *система* $\begin{cases} 2^{3x} - 2^{8y-3x+3} \ge 2^{4y+1} \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$*, має хоча б один розв'язок?*

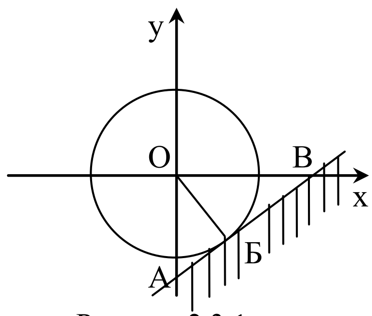

Рисунок 2.3.1

Розв'язування. Спростимо нерівність, щоб перейти до графічного образу. Отримаємо $2^{3x-4y} - 2^{4y-3x} 8 \ge 2$. Робимо заміну $2^{4y-3x} = b$. Тоді нерівність набуває вигляду $\frac{1}{b} - 8b - 2 \ge 0$. Врахувавши, що завжди $b > 0$, маємо $b \le \frac{1}{4}$. Повертаємось до нерівності $2^{4y-3x} \le 2^{-2}$, звідки $4y - 3x + 2 \le 0$. Отже, система набуває вигляд $\begin{cases} 4y - 3x + 2 \le 0 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$.

Рівняння $x^2 + y^2 = a$ задає сімейство гомотетичних кіл з центром у початку координат та радіусом $\sqrt{a}$, а множиною розв'язків нерівності буде півплощина з межею $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$. З рисунка 2.3.1 видно, що система буде мати розв'язок при радіусі кола більшому, ніж ОБ, тобто відстані від точки О до півплощини. Із трикутника *AOB*: $OB = AO \cos\angle AOB = AO \cos\angle OBA = \frac{2}{5}$. Маємо $a \ge \frac{4}{25}$.

Відповідь. При $a \ge \frac{4}{25}$ система має розв'язки.

Розв'язування з використанням ІТН.

Створюємо два об'єкти, вибравши у списку об'єктів „Неявна : 0=G(X,Y)", які відповідають функціям системи. $2^{3x} - 2^{8y-3x+3} \ge 2^{4y+1}$: 2^(3*x)-2^(8*y-3*x+3)-2^(4*y+1); $x^2 + y^2 = a$: x^2+y^2-p1 (рисунок 2.3.2). Параметр **p1** – параметр **a** з даної системи. Будуємо графіки функції. Змінюємо значення параметра **p1** поки графіки не перетнуться. Виділяємо перший об'єкт та звертаємось до послуги „С-ма нерівностей G(x,y)>0" з підменю „Нерівності" з меню „Операції". В результаті буде заштриховано півплощину – множину розв'язків нерівності $2^{3x} - 2^{8y-3x+3} \ge 2^{4y+1}$. Змінюючи параметр p_1, знайдемо, що при **p1=0,16** система має розв'язок.

Відповідь. При $a \ge 0{,}16$ система має розв'язки.

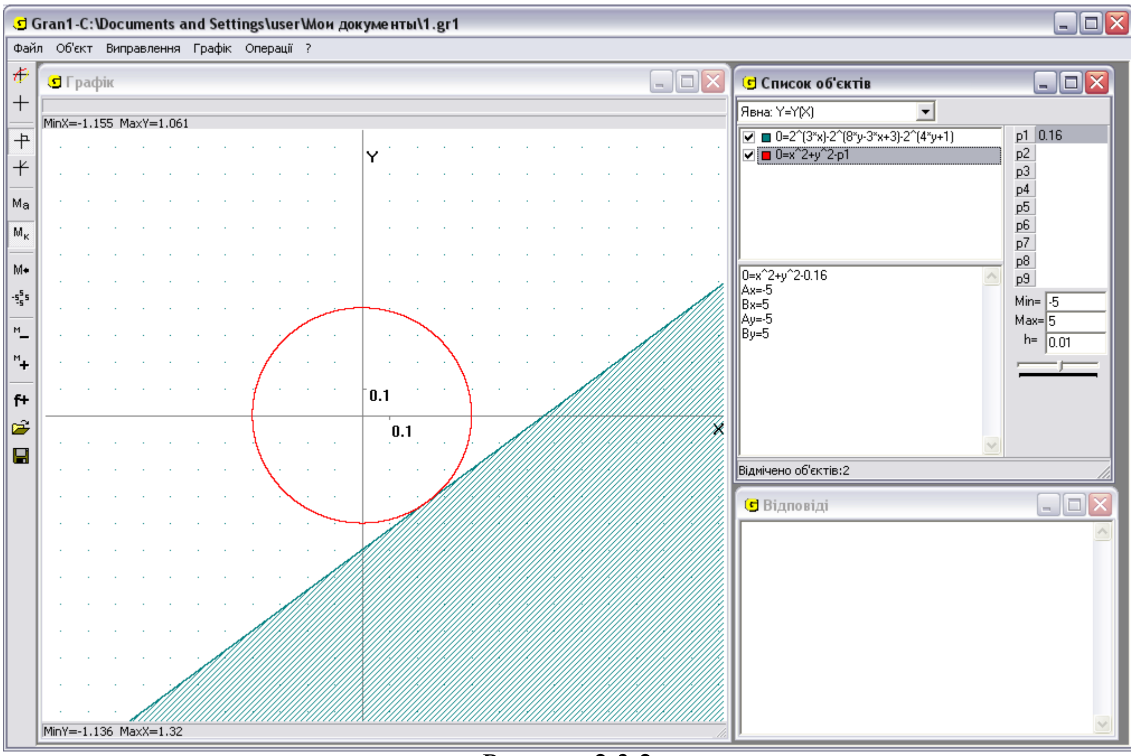

Рисунок 2.3.2

4)Дві прямі на площині

Задача. *Знайти* ***a****, при яких система рівнянь* $\begin{cases}(2a-3)x-ay=3a-2\\ 5x-(2a+3)y=5\end{cases}$ *має єдиний розв'язок.*

Розв'язування. Зводимо рівняння до виду $y=kx+b$, де **к** – тангенс кута нахилу прямої. Маємо систему $\begin{cases}y=\dfrac{2a-3}{a}x-(3-\dfrac{2}{a})\\ y=\dfrac{5}{2a+3}x-\dfrac{5}{2a+3}\end{cases}$. Система має єдиний розв'язок за умови, коли кути нахилу прямих різні. Тобто $\dfrac{2a-3}{a}\neq\dfrac{5}{2a+3}$. Розв'язавши дане рівняння, одержимо, що $a\neq-1$ та $a\neq\dfrac{9}{4}$. При всіх інших значеннях параметра **а** система має єдиний розв'язок.

Відповідь. При $a\neq-1$ та $a\neq\dfrac{9}{4}$ система не має розв'язків, при всіх інших значеннях параметра **а** система має єдиний розв'язок.

Розв'язування з використанням ІТН.

Зводимо рівняння до виду явно заданої функції та створюємо об'єкти $y=\dfrac{2p1-3}{p1}x-(3-\dfrac{2}{p1})$; $y=\dfrac{5}{2p1+3}x-\dfrac{5}{2p1+3}$, де **p1** відповідає параметру **a**. Встановлюємо **Min=-5**, **Max=5** та крок зміни параметра **h=0.25.** Змінюємо значення параметра **p1** спостерігаємо за графіком (рисунок 2.4.1). При **p1=-1** прямі співпадають, а при **p1=2.25** прямі паралельні.

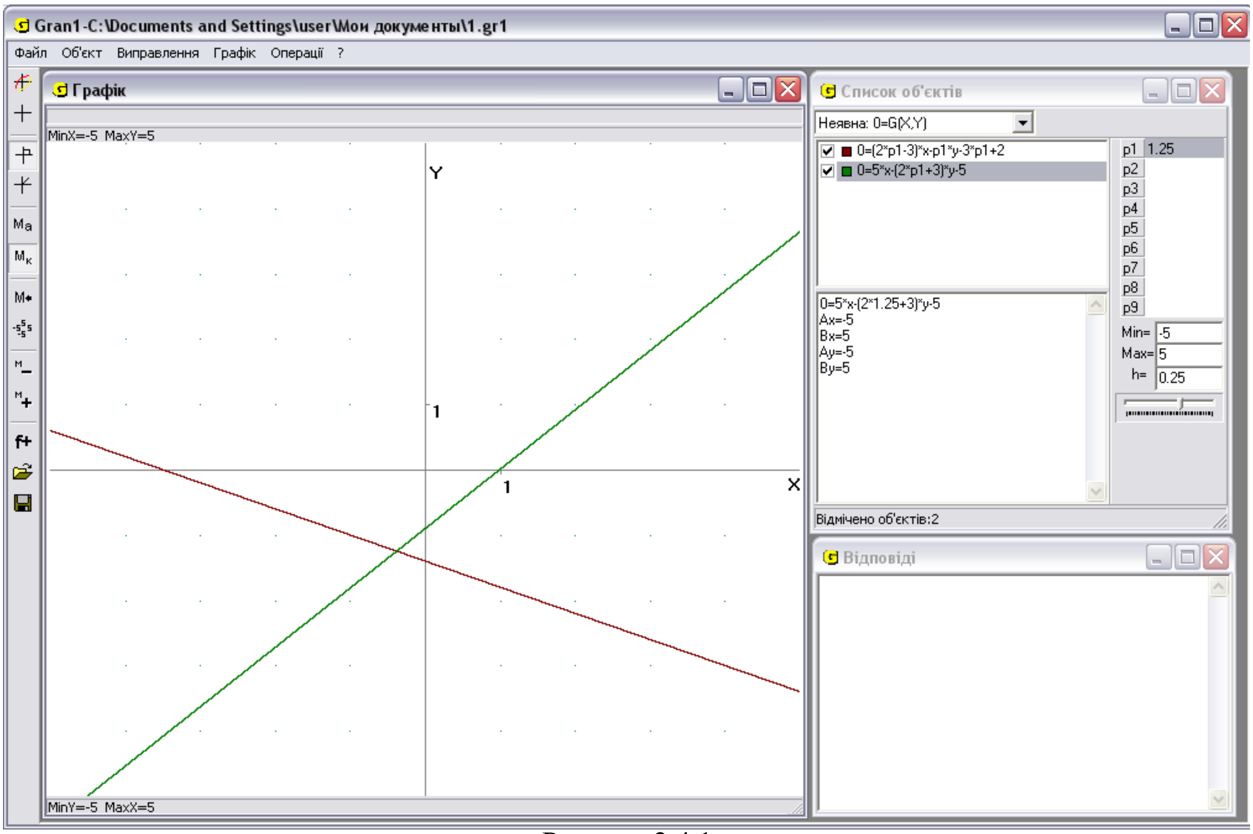

Рисунок 2.4.1

Відповідь. При $a \neq -1$ та $a \neq \dfrac{9}{4}$ система не має розв'язків, при всіх інших значеннях параметра **a** система має єдиний розв'язок.

Таким чином ми бачимо, що розв'язування наведених вище задач при вивченні ППЗ **«GRAN 1»** дозволяє глибше розкрити можливості використання програми, реалізувати міжпредметі зв'язки з математикою. Реалізація міжпредметних зв'язків дозволяє сформувати єдиний науковий світогляд учнів та студентів. Міжпредметні зв'язки забезпечують підвищення інтересу до вивчення предметів та допомагають у професійній орієнтації учнів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вінниченко Є.Ф. Розвиток творчих здібностей старшокласників у процесі навчання інформаційних технологій розв'язування математичних задач: Дис... канд. пед. наук : 13.00.02 / К., Національний педагогічний ун-т ім. М.П.Драгоманова. – 2006. – 234с.
2. Горошко Ю.В. Вплив нової інформаційної технології на практичну значимість результатів навчання математики в старших класах середньої школи: Автореф. дис. канд. пед. наук. – Київ, 1992. – 20 с.
3. Комп'ютер на уроках фізики: Посібник для вчителів / М.І. Жалдак, Ю.К. Набочук, І.Л. Семещук – Костопіль, РВП"РОСА", 2005. – 228с.
4. Сем енець С.П. Розвиток продуктивного мислення учнів при вивченні алгебри і початків аналізу: Дис... канд. пед. наук : 13.00.02 / Національний педагогічний ун-т ім. М.П.Драгоманова. – К., 1998. – 220с.
5. Семещук І.Л. Формування основних понять механіки в курсі фізики середньої школи з використанням сучасних інформаційних технологій: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Міжнародний ун-т "Рівненський економіко-гуманітарний ін-т" ім. Степана Дем'янчука. – Рівне, 2004. – 247с.