О. Л. Дрозденко
Таращанський агротехнічний коледж
ім. Героя Радянського Союзу О. О. Шевченка

ВИКОРИСТАННЯ ПАКЕТУ СИМВОЛЬНИХ ОБЧИСЛЕНЬ MAPLE ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Однією з характерних рис двадцять першого століття є впровадження в повсякденне життя високоефективних комп'ютерних технологій. Сьогодні неможливо уявити собі висококваліфікованого вченого, конструктора, інженера, який не використовує Internet для одержання найсвіжішої інформації. Комп'ютер, пакети символьних програм наполегливо і безповоротно входять в життя не тільки науково-дослідних установ, університетів, а і в професійні коледжі, школи та родини.

Проблемам доцільності, можливості, обсягу, формам і методами використання сучасних інформаційних технологій в процесі навчання шкільного курсу математики та математичних дисциплін студентів вищих навчальних закладів присвячена велика кількість досліджень, зокрема [3,4,5,9,12,13], розроблені методичні рекомендації щодо навчання конкретних математичних дисциплін з використанням інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) [1,2,10,11,14].

Нас цікавить проблема використання ІКТ в процесі навчання вищої математики студентів професійних коледжів. Доцільність використання ІКТ в навчанні математики студентів професійних коледжів насамперед пов'язана з тим, що одним з реальних шляхів підвищення якості професійної (зокрема, математичної) підготовки майбутніх фахівців є активізація навчально-пізнавальної діяльності студентів, підвищення ефективності навчання. При цьому використання ІКТ дає можливість:

- підвищити мотивацію навчання;
- ефективніше реалізувати принципи диференціації та індивідуалізації навчання;
- краще організувати і підвищити ефективність аудиторної та самостійної роботи студентів;
- озброїти новими засобами пізнавальної діяльності, новими методами і прийомами наукового пізнання, що базуються на використанні ІКТ.

На сьогодні розроблено велику кількість програмного забезпечення, яке дозволяє розв'язувати досить широке коло математичних задач різного рівня складності. До таких програм відносяться: Axyom, Derive, Gran (1, 2d, 3d), Macsyma, Maple, Mathematica, Reduce та інші. Зокрема програмні комплекси Gran [1,2] є досить зручними саме для підтримки навчання вищої математики (насамперед, аналітичної геометрії). Вони є простими у використанні, мають досить зручний інтерфейс і не вимагають великого обсягу спеціальних знань з інформатики та програмування.

В цій статті ми зупинимось на пакеті символьних обчислень Maple, який є одним з лідерів універсальних систем і забезпечує користувачу зручне інтелектуальне середовище для математичних досліджень.

Програма розроблена науково-дослідною групою відділу обчислювальної техніки університетів Waterloo, (штат Онтаріо, Канада, заснована в грудні 1980 року Кейтом Геддом і Гастоном Гоне) та Вищою технічною школою (ETH, Цюріх, Швейцарія).

На сьогоднішній день Maple є потужною обчислювальною системою, призначеною для виконання складних проектів.

З допомогою Maple успішно виконуються складні алгебраїчні перетворення і спрощення над полем як дійсних, так і комплексних чисел, знаходяться границі, скінченні і нескінченні суми, добутки, інтеграли, розв'язуються в символьному вигляді і чисельно алгебраїчні системи рівнянь і нерівностей, знаходяться корені многочленів, розв'язуються звичайні диференціальні рівняння та їх системи. В Maple включені пакети для розв'язування задач комбінаторики, двовимірної та тривимірної евклідової геометрії, теорії груп, лінійної алгебри, булевої логіки, теорії графів, теорії розміщень, теорії чисел, проективної геометрії, лінійної оптимізації, статистики і інші.

Пакет включає розвинуту графічну бібліотеку і мову програмування.

За допомогою Maple можна розв'язувати велику кількість математичних задач шляхом введення команд без будь-якого попереднього програмування. Maple оперує цілими, раціональними числами та їх десятковими наближеннями. Це дозволяє отримати вираз результатів як в радикалах, так і їх наближення з потрібною точністю.

Розглянемо деякі можливості Maple на прикладі розв'язання задачі аналітичної геометрії про тетраедр, визначений рівняннями граней, вписану та описану сфери.

Команди стереометрії, які будуть використовуватись при розв'язанні задачі.

`area`	**обчислення площі трикутника;**
`centr`	**обчислення центра сфери;**
`coordinates`	**визначення координат точки;**
`distance`	**обчислення відстані між двома точками;**
`radius`	**обчислення радіуса сфери;**
`point(O,a,b,c);`	**задання точки O з координатами (a,b,c);**
`sphere(name,[pt3d,expr])`	**визначення сфери з центром в точці `pt3d` і радіусом `expr`;**
`tetrahedron`	**задання тетраедра за чотирма його вершинами;**
`gtetrahedron([p1, p2, p3, p4]);`	**задання тетраедра за чотирма його гранями;**
`volume`	**обчислення об'єму сфери;**
`solve`	**розв'язування рівнянь та систем рівнянь;**
`evalf`	**обчислення наближеного значення.**

Задача. Скласти рівняння сфери, вписаної в тетраедр, який визначається рівняннями граней

$$x+1=0,\quad y+2=0,\quad z+1=0,\quad x+y+z-2\sqrt{3}-2=0.$$

Обчислити площу повної поверхні даного тетраедра, його об'єм. Знайти центр описаної навколо тетраедра сфери, її радіус. Написати рівняння сфери і знайти її об'єм. Зобразити тетраедр, вписану та описану сфери в даній прямокутній декартовій системі координат.

Розв'язання.

Використаємо пакет символьних обчислень Maple.

Підключимось до бібліотеки **geom3d**.

```
> with(geom3d):
Warning, the name polar has been redefined
```

Задамо площини $x+1=0,\quad y+2=0,\quad z+1=0,\quad x+y+z-2\sqrt{3}-2=0$:

```
> plane(p1,x=-1,[x,y,z]); plane(p2,y=-2,[x,y,z]);
plane(p3,z=-1,[x,y,z]);plane(p4,x+y+z-2*sqrt(3)-
2=0,[x,y,z]);
```

$$p1$$
$$p2$$
$$p3$$
$$p4$$

Задамо тетраедр, який визначають дані площини:

```
> EnvXName := 'x': _EnvYName := 'y': _EnvZName := 'z':
gtetrahedron(T2, [p1, p2, p3, p4]);
```

$$T2$$

Прочитаємо координати його вершин і граней:

```
> detail(T2);
```

name of the object: T2

form of the object: gtetrahedron3d

*the 4 vertices: [[-1, -2, -1], [-1, -2, 2*3^(1/2)+5], [-1, 4+2*3^(1/2), -1], [2*3^(\ 1/2)+5, -2, -1]]*

*the 4 faces: [[[-1, -2, -1], [-1, -2, 2*3^(1/2)+5], [-1, 4+2*3^(1/2), -1]], [[-1, -2,\ -1], [-1, -2, 2*3^(1/2)+5], [2*3^(1/2)+5, -2, -1]], [[-1, -2, -1], [-1, 4+2*3^(1/2)\ , -1], [2*3^(1/2)+5, -2, -1]], [[-1, -2, 2*3^(1/2)+5], [-1, 4+2*3^(1/2), -1], [2*3^\ (1/2)+5, -2, -1]]]*

Позначимо вершини тетраедра точками B_1, B_2, B_3, B_4, *тоді*

```
> point(B1,-1, -2, -1);
```

$$B1$$

```
> point(B2,-1, -2, 2*3^(1/2)+5);
```

$$B2$$

```
> point(B3,-1, 4+2*3^(1/2), -1);
```

$$B3$$

```
> point(B4,2*3^(1/2)+5, -2, -1);
```

$$B4$$

Центр вписаної в тетраедр сфери буде знаходитись в одній з точок, яка рівновіддалена від всіх його граней. Задамо точку $O(a,b,c)$:

```
> point(O,a,b,c);
```

O

Знайдемо відстань від точки $O(a,b,c)$ *до кожної з чотирьох площин:*

```
> d1:=distance(O,p1);
```

$$d1 := |a+1|$$

```
> d2:=distance(O,p2);
```

$$d2 := |2+b|$$

```
> d3:=distance(O,p3);
```

$$d3 := |1+c|$$

```
> d4:=distance(O,p4);
```

$$d4 := \frac{1}{3}\left| a+b+c-2\sqrt{3}-2 \right| \sqrt{3}$$

Для знаходження a,b,c *складаємо та розв'язуємо систему:*

$$\begin{cases} |a+1| = |b+2|; \\ |a+1| = |c+1|; \\ |a+1| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left|a+b+c-2\sqrt{3}-2\right|. \end{cases}$$

```
> solve({ abs(a+1)= abs(2+b),abs(a+1)= abs(1+c),abs(a+1) =
1/3*abs(a+b+c-2*sqrt(3)-2)*sqrt(3)},{a,b,c});
```

$$\{c=3+2\sqrt{3},\ b=2+2\sqrt{3},\ a=3+2\sqrt{3}\},\ \{b=0,\ c=1,\ a=1\},$$
$$\{b=-2+2\sqrt{3},\ c=-1+2\sqrt{3},\ a=-1-2\sqrt{3}\},$$
$$\{b=-2+2\sqrt{3},\ a=-1+2\sqrt{3},\ c=-1-2\sqrt{3}\},$$
$$\{a=-7-4\sqrt{3},\ c=-7-4\sqrt{3},\ b=4+4\sqrt{3}\},$$
$$\{c=-1+2\sqrt{3},\ b=-2\sqrt{3}-2,\ a=-1+2\sqrt{3}\},$$
$$\{a=-7-4\sqrt{3},\ c=5+4\sqrt{3},\ b=-8-4\sqrt{3}\},$$
$$\{c=-7-4\sqrt{3},\ a=5+4\sqrt{3},\ b=-8-4\sqrt{3}\}$$

Одержали вісім точок, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від площин: $x+1=0,\quad y+2=0,\quad z+1=0,\quad x+y+z-2\sqrt{3}-2=0$:

```
> point(A1, 3+2*sqrt(3),2+2*sqrt(3), 3+2*sqrt(3));
```

$A1$

```
> point(A2,1,0,1 );
```

$A2$

```
> point(A3,-1+2*sqrt(3),-2+2*sqrt(3),-1-2*sqrt(3));
```

$A3$

```
> point(A4,-1+2*sqrt(3),-2*sqrt(3)-2,-1+2*sqrt(3));
```

$A4$

```
> point(A5,5+4*sqrt(3),-8-4*sqrt(3),-7-4*sqrt(3) );
```

$A5$

```
> point(A6,-1-2*sqrt(3), -2+2*sqrt(3),-+2*sqrt(3));
```

$A6$

```
> point(A7,-7-4*sqrt(3),4+4*sqrt(3),-7-4*sqrt(3));
```

$A7$

```
> point(A8,-7-4*sqrt(3),-8-4*sqrt(3),5+4*sqrt(3) );
```

$A8$

Маючи координати вершин тетраедра, легко встановлюємо, що лише точка $A_2\ 1,0,1$ *розміщена всередині тетраедра. Отже, центром вписаної сфери є точка* $A_2\ 1,0,1$. *Радіус сфери дорівнює відстані від точки* $A_2\ 1,0,1$ *до будь-якої з площин, що містять грані тетраедра. Знайдемо його як відстань від точки* $A_2\ 1,0,1$ *до площини* $x+1=0$:

```
> distance(A2,p1);
```

2

Записуємо рівняння шуканої вписаної сфери:

$$x-1\ ^2+y^2+\ z-1\ ^2=4.$$

Задамо сферу в пакеті символьних обчислень Maple:

```
>sphere(s,(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=4,[x,y,z] 'centername'=A2);
```
s

```
> center(s);
```
$A2$

```
> coordinates(%);
```
$[1, 0, 1]$

Знайдемо площу поверхні тетраедра як суму площ трикутників $B_1B_2B_3$, $B_1B_2B_4$, $B_1B_3B_4$, $B_2B_3B_4$.

Знаходимо площу кожного з трикутників $B_1B_2B_3$, $B_1B_2B_4$, $B_1B_3B_4$, $B_2B_3B_4$:

```
> triangle(B1B2B3, [point(B1,-1, -2, -1), point(B2,-1, -2,
2*3^(1/2)+5), point(B3,-1, 4+2*3^(1/2), -1)]);
```
$B1B2B3$

```
> area(B1B2B3);
```
$\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+6)^2$

```
> triangle(B1B2B4, [point(B1,-1, -2, -1), point(B2,-1, -2,
2*3^(1/2)+5), point(B4,2*3^(1/2)+5, -2, -1)]);
```
$B1B2B4$

```
> area(B1B2B4);
```
$\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+6)^2$

```
> triangle(B1B3B4, [point(B1,-1, -2, -1), point(B3,-1,
4+2*3^(1/2), -1), point(B4,2*3^(1/2)+5, -2, -1)]);
```
$B1B3B4$

```
> area(B1B3B4);
```
$\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+6)^2$

```
> triangle(B2B3B4, [point(B2,-1, -2, 2*3^(1/2)+5),
point(B3,-1, 4+2*3^(1/2), -1), point(B4,2*3^(1/2)+5, -2, -
1)]);
```
$B2B3B4$

```
> area(B2B3B4);
```
$$\frac{1}{2}\sqrt{2\,(2\sqrt{3}+6)^2\,(-6-2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3}+6)^4}$$

Знаходимо площу повної поверхні тетраедра:

```
>S:=1/2*(2*sqrt(3)+6)^2+1/2*(2*sqrt(3)+6)^2+1/2*(2*sqrt(3)+
6)^2+1/2*sqrt(2*(2*sqrt(3)+6)^2*(-6-
2*sqrt(3))^2+(2*sqrt(3)+6)^4);
```
$$S := \frac{3}{2}(2\sqrt{3}+6)^2+\frac{1}{2}\sqrt{2\,(2\sqrt{3}+6)^2\,(-6-2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3}+6)^4}$$

Знайдемо наближене значення площі:

```
>S:=1/2*(2*sqrt(3.)+6)^2+1/2*(2*sqrt(3.)+6)^2+1/2*(2*sqrt(3
.)+6)^2+1/2*sqrt(2*(2*sqrt(3.)+6)^2*(-6-
2*sqrt(3.))^2+(2*sqrt(3.)+6)^4);
```
$S := 211.9230485$

Знайдемо об'єм тетраедра:

```
> V1:=volume(T2);
```
$$V1 := \frac{1}{6}(2\sqrt{3}+5)^2(4+2\sqrt{3})+\frac{13}{3}+\frac{1}{3}(2\sqrt{3}+5)(4+2\sqrt{3})+\frac{5}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{3}(2\sqrt{3}+5)^2$$

Знайдемо наближене значення об'єму:

```
> V1:=evalf(%);
```
$V1 := 141.2820323$

Задамо описану сферу як сферу, яка проходить через точки B_1, B_2, B_3, B_4, і знайдемо координати її центра, радіус, рівняння та об'єм.

```
> sphere(s1, [B1, B2, B3, B4],['x', 'y','z' ]);
```

$$s1$$

```
> coordinates(center(s1)) ;
```

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{-1824\sqrt{3}-3168}{432+240\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\frac{-2304-1344\sqrt{3}}{432+240\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\frac{-1824\sqrt{3}-3168}{432+240\sqrt{3}}\right]$$

```
> radius(s1);
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{2\frac{(-1824\sqrt{3}-3168)^2}{(432+240\sqrt{3})^2}+\frac{(-2304-1344\sqrt{3})^2}{(432+240\sqrt{3})^2}-\frac{4(-13536-7776\sqrt{3})}{432+240\sqrt{3}}}$$

```
> Equation(s1);
```

$$x^2+y^2+z^2+\frac{(-1824\sqrt{3}-3168)x}{432+240\sqrt{3}}+\frac{(-2304-1344\sqrt{3})y}{432+240\sqrt{3}}+\frac{(-1824\sqrt{3}-3168)z}{432+240\sqrt{3}}$$
$$+\frac{-13536-7776\sqrt{3}}{432+240\sqrt{3}}=0$$

```
> V2:=volume(s1);
```

$$V2 :=$$
$$\frac{1}{6}\pi\left(2\frac{(-1824\sqrt{3}-3168)^2}{(432+240\sqrt{3})^2}+\frac{(-2304-1344\sqrt{3})^2}{(432+240\sqrt{3})^2}-\frac{4(-13536-7776\sqrt{3})}{432+240\sqrt{3}}\right)^{(3/2)}$$

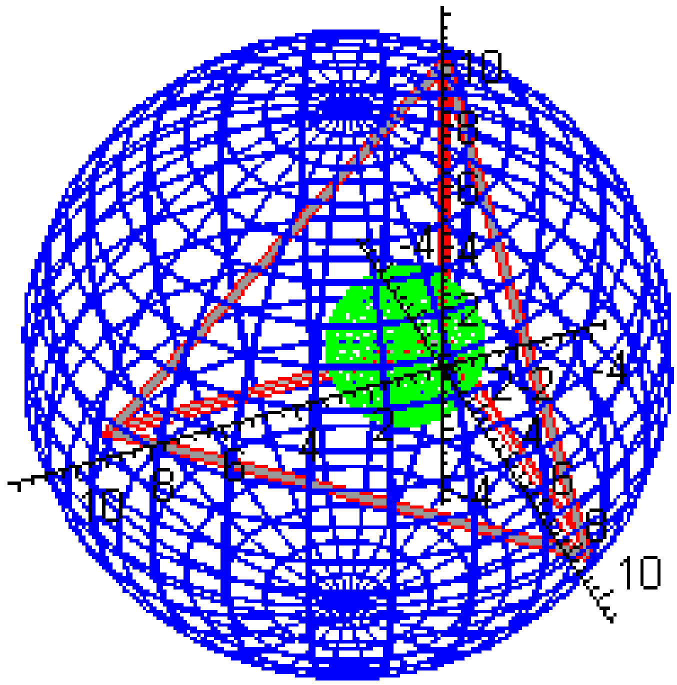
```
> V2:=evalf(%);
```

$$V2 := 2306.315342$$

Зобразимо одержаний тетраедр, вписану та описану сфери в прямокутній декартовій системі координат:

```
>draw([T2(color=red),s(color=green),s1(color=blue)],cutout=7.5/8,lightmodel=light4,
title=`Сфери: вписана в тетраедр та описана навколо тетраедра`,orientation=[0,32]);
```

Сфери: вписана в тетраедр та описана навколо нього



Література

1. Дьяконов В.П. Maple 8 в математике, физике и образовании. — М.: СОЛОН-Пресс, 2003. — 656 с.
2. Жалдак М.І., Вітюк О.В. Комп’ютер на уроках геометрії: Посібник для вчителів. — К.: РННЦ ДІНІТ, 2003. — 168 с.
3. Жалдак М.І., Горошко Ю.В., Вінніченко Є.Ф. Математика з комп’ютером. — К.: РННЦ ДІНІТ, 2004. — 168 с.
4. Жалдак М.І. Проблема інформатизації навчального процесу у школі і в вузі // Сучасна інформаційна технологія в навчальному процесі: Збірник наукових праць. — К.: КДПІ імені М.П.Драгоманова, 1991. — С. 3-16.
5. Клочко В.І. Застосування новітніх інформаційних техінологій при вивченні вищої математики у технічному вузі: Навчально-методичний посібник. — Вінниця: ВДТУ, 1997. — 300с.
6. Концепція програми інформатизації загальноосвітніх навчальних закладів, комп’ютеризації сільських шкіл // Комп’ютер у школі та сім’ї. — 2000.— № 3. — С. 3-10.
7. Математика для технікумів. Геометрія / За ред. Г.Н.Яковлева. — К.: Вища школа, 1983. — 256с.
8. Математика: Підручник для студентів вищих навчальних закладів 1 та 2 рівнів акредитації / О.М.Афанасьєва, Я.С.Бродський, Павлов О.Л., Сліпенко А.К. — К.: Вища математика, 2001. — 447 с.
9. Валуце І.І., Ділігул Г.Д. Математика для технікумів на базі середньої школи. — М.: Наука, 1980. — 576с.
10. Морзе Н.В. Основи інформаційно-комунікаційних технологій. — К.: Видавнича група BHV, 2006. — 352 с.
11. Машбиць Ю.І., Гокунь О.О., Жалдак М.І., Морзе Н.В. та ін. Основи нових інформаційних технологій навчання: Посібник для вчителів — К.: Інститут психології ім. Г.С.Костюка АПН України; Інститут змісту і методів навчання, 1997. — 260с.
12. Раков С.А., Горох В.П., Осенков К,О. та ін. Відкриття геометрії через комп’ютерні експерименти в пакеті DG // Посібник для вчителів математики. – – Харків: вікторія. — 2002. — 136 с.
13. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ – – Харків: Факт, 2005. — 360 с.
14. Співаковський О.В. Інформаційні технології в реалізації комп’ютерно-орієнтованого навчання // Комп’ютер в школі і сім’ї. — 2003, № 6. — С. 21-23.
15. Триус Ю.В. Комп’ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін. — Черкаси: Брама-Україна, 2005. — 400с.