М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, С. Я. Деканов
НПУ імені М. П. Драгоманова

Одне узагальнення поняття границі функції та деякі його застосування

1. Вступ. Поняття границі є одним з найважливіших математичних понять, що утворюють фундамент сучасної математики. Сутність цього поняття дуже проста: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ означає, що $f(x)$ як завгодно близьке до a, коли $x\neq x_0$, проте x досить близьке до x_0. Або: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, якщо $f(x)\overset{М}{=}a$ ($f(x)$ майже дорівнює a), коли $x_0\neq x\overset{Д}{=}x_0$ (x досить близьке до x_0).

Рівень узагальнення поняття границі функції в сучасній математиці надзвичайно високий. Так, усі види границь, які зустрічаються в курсі вищої математики (у тому числі інтеграли), вписуються у поняття границі впорядкованої змінної [1, т. 3, с. 629 – 649], а також у поняття границі за напрямом [2, с. 122 – 144]. На жаль, у навчальних математичних курсах для студентів педагогічних університетів ці узагальнення найчастіше навіть не згадуються.

У даній роботі розглянуто одне узагальнення поняття границі функції, важливим частинним випадком якого є поняття “повільно спадної функції”, та проілюстровано застосування цього узагальнення до деяких задач математичного аналізу, психології, теорії ймовірностей.

2. Поняття границі функції за певної умови. *Границею функції* $f(x)$ *за умови, що* $\varphi(x)$ *прямує до* a*, називають таку точку* A*, для довільного околу* $O(A)$ *якої існує проколотий окіл* $O^*(a)$ *точки* a *такий, що* $f(x)\in O(A)$*, коли* $\varphi(x)\in O^*(a)$. *При цьому записують* $\lim\limits_{\varphi(x)\to a} f(x)=A$.

Сутність введеного поняття полягає у наступному: $\lim\limits_{\varphi(x)\to a} f(x)=A$, якщо $f(x)\overset{М}{=}A$, коли $a\neq\varphi(x)\overset{Д}{=}a$, тобто $f(x)$ *майже дорівнює* A, коли $\varphi(x)\neq a$, проте *досить близьке* до a.

Звичайне поняття границі функції f у скінченній точці x_0 є частинним випадком границі функції за умови, коли остання задана функцією $\varphi(x)=x$ або $\varphi(x)=\rho(x,x_0)$, де $\rho(x,x_0)$ – відстань від x до x_0, оскільки $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{\rho(x,x_0)\to 0} f(x)$ за умови існування будь-якої частини останньої рівності.

Іншим частинним випадком поняття границі функції за умови є поняття границі функції у нескінченно віддаленій точці $x_0=\infty$: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{1/x\to 0} f(x)$. Тут $\varphi(x)=1/x\to 0=a \Leftrightarrow x\to\infty$.

Наведемо ще один важливий частинний випадок поняття границі функції за умови. *Функцію* f називають *повільно спадною (або повільно зростаючою) при* $0<x\to+\infty$, якщо $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(y)-f(x)\right]=0$, коли $1<y/x\to 1$.

Позначимо $t=(x,y)$, $F(t)=F(x,y)=f(y)-f(x)$, а $\varphi(t)=\varphi(x,y)=(1/x,\,y/x)$, причому вважатимемо, що $t=(x,y)\in\{(x,y):\ y>x>0\}$ і $a=(0,1)$. Тоді повільне спадання функції f при $0<x\to+\infty$ означає, що $\lim\limits_{\varphi(t)\to a} F(t)=0$, де $\varphi(t)\to a \Leftrightarrow (1/x,\,y/x)\to(0,1) \Leftrightarrow x\to+\infty$ і $1<y/x\to 1$.

3. Інша форма означення границі функції за певної умови. Як і для звичайного поняття границі функції в точці, поняття границі функції за умови можна сформулювати мовою послідовностей: $\lim\limits_{\varphi(x)\to a} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ для будь-якої послідовності $x_n\in D(f)$ такої, що $a\neq\varphi(x_n)\to a$ при $n\to\infty$.

Зокрема, функція f є повільно спадною при $0<x\to+\infty$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(y_n)-f(x_n)\right]=0$ для будь-яких послідовностей $x_n\in D(f)$ та $y_n\in D(f)$ таких, що $x_n\to+\infty$, а $1<y_n/x_n\to 1$ при $n\to\infty$.

Кожна функція f, що має скінченну границю $\lim\limits_{0<x\to+\infty} f(x)$, є повільно спадною (повільно зростаючою). Такою є і функція $f(x)=\ln x$, оскільки $\ln y-\ln x=\ln y/x\to 0$, коли $1<y/x\to 1$. Функція $f(x)=\ln^2 x$ вже не є повільно спадною, оскільки якщо $y_n=x_n\left(1+\dfrac{1}{\ln x_n}\right)$, $x_n\to+\infty$, то $1<\dfrac{y_n}{x_n}\to 1$, проте

$$\ln^2 y_n-\ln^2 x_n=\left(\ln x_n+\ln\left(1+\frac{1}{\ln x_n}\right)\right)^2-\ln^2 x_n\geq 2\ln x_n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\ln x_n}\right)=$$

$$=2\ln\left(1+\frac{1}{\ln x_n}\right)^{\ln x_n}\to 2 \text{ при } n\to\infty.$$

4. Поняття часткової границі функції за певної умови. Точку A називають *частковою границею функції* $f(x)$ *за умови, що* $\varphi(x)$ *прямує до* a, коли існує послідовність точок $x_n\in D(f)$, для якої $\varphi(x_n)\to a$ і $f(x_n)\to A$ при $n\to\infty$. Для того щоб точка A була границею функції $f(x)$ за умови, що $\varphi(x)$ прямує до a, необхідно й достатньо, щоб вона була єдиною частковою границею функції $f(x)$ за цієї умови.

Так, легко бачити, що для функції $\sin\dfrac{1}{1/x+1/y-1}$ кожне число $A\in[-1;1]$ є частковою границею за умови $1/x+1/y\to 1$. Тому ця функція не має границі за даної умови.

5. Застосування поняття границі функції за умови до розв'язування задачі про глобальні екстремуми однієї функції. *Нехай задано функцію* $f(x,y)=\dfrac{xy}{1-1/x-1/y}$ *в області*

$$G=\{(x,y):\ x>0,\ y>0,\ 1/x+1/y<1\}.$$

Область G *задання функції* $f(x,\ y)$ *зображено на рис.* 1. *Необхідно визначити, чи має функція* f *глобальні екстремуми в області* G.

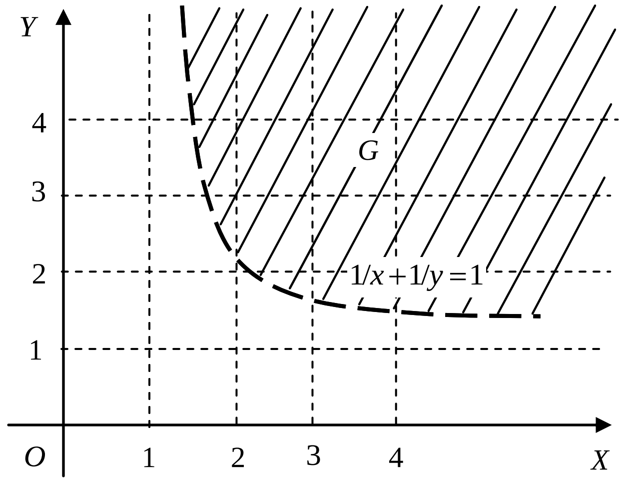

Рис. 1

Скористатися теоремою Вейєрштрасса тут не можна, оскільки G не є компактною множиною (вона не є замкненою і не є обмеженою). Разом з тим легко бачити, що коли $1/x+1/y$ досить близьке до 1, а $(x,y)\in G$, то $xy>1$, а $1-1/x-1/y>0$ і близьке до нуля. Тому $f(x,y)$ близьке до $+\infty$, тобто $\sup\limits_G f(x,y)=+\infty$.

Щоб вирішити, чи існує $\min\limits_G f(x,y)$, зауважимо, що

$$\lim_{1/x+1/y\to 1} f(x,y)=+\infty \quad \text{і} \quad \lim_{x+y\to+\infty} f(x,y)=+\infty,$$

коли $(x,y)\in G$. Першу рівність вже доведено, а друга випливає з того, що коли $(x,y)\in G$, то $xy>x+y$, а тому $f(x,y)=\dfrac{xy}{1-1/x-1/y}>xy\to+\infty$, коли $x+y\to+\infty$.

Згадуючи означення границі функції за умови, дістанемо, що $\forall H>0$ $\exists\delta>0$ і $\exists r>0$ такі, що $f(x,y)>H$, коли

$$(x,y)\in G_1=\{(x,y)\in G:\ 1/x+1/y>1-\delta\}$$

або

$$(x,y)\in G_2=\{(x,y)\in G:\ x+y>r\}.$$

Області G_1 і G_2 зображено на рис. 2.

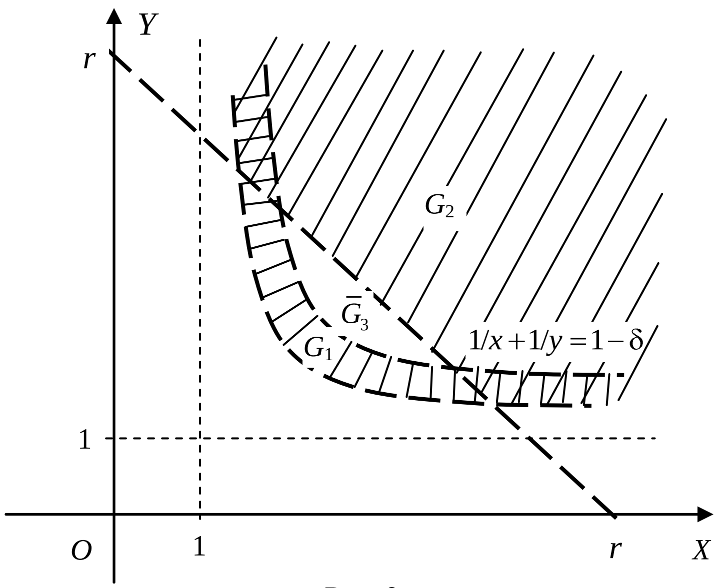

Рис. 2

Зафіксуємо яку-небудь точку $(x_1,y_1)\in G$, наприклад, $(x_1,y_1)=(3,3)$. Знайдемо тепер для $H>f(x_1,y_1)=27$ числа $\delta>0$ і $r>0$ так, як це вказано вище, але щоб точка (x_1,y_1) належала області $\bar G_3=G\setminus(G_1\cup G_2)$. Множина $\bar G_3$ є замкненою обмеженою областю (див. рис. 2), а тому за теоремою Вейєрштрасса існує точка $(x_0,y_0)\in\bar G_3$, для якої $f(x_0,y_0)=\min\limits_{\bar G_3} f(x,y)$, причому $f(x_0,y_0)\le f(x_1,y_1)<H$. Зрозуміло, що тоді $f(x_0,y_0)=\min\limits_G f(x,y)$, тобто дана функція має глобальний мінімум в області G. Знайти його вже досить просто, якщо скористатися необхідною умовою екстремуму.

Зауваження. Оскільки для диференційовної функції двох змінних існування єдиної точки локального екстремуму (наприклад, точки мінімуму) у даній області не гарантує, що в цій точці функція набуває значення глобального екстремуму (див., наприклад, [1, т. 1, с. 431]), то без наведеного або аналогічного дослідження розв’язати дану задачу неможливо. Також неможливо розв’язати дану задачу, використовуючи тільки комп’ютерні засоби математики, наприклад такі, як GRAN1, MATHCAD, тощо (див. рис. 3). Разом з тим після виділення вказаної вище замкненої області $\bar{G}_3$ глобальний мінімум функції f можна знайти, наприклад, за допомогою GRAN1, будуючи лінії рівня заданої функції (див. рис. 3).

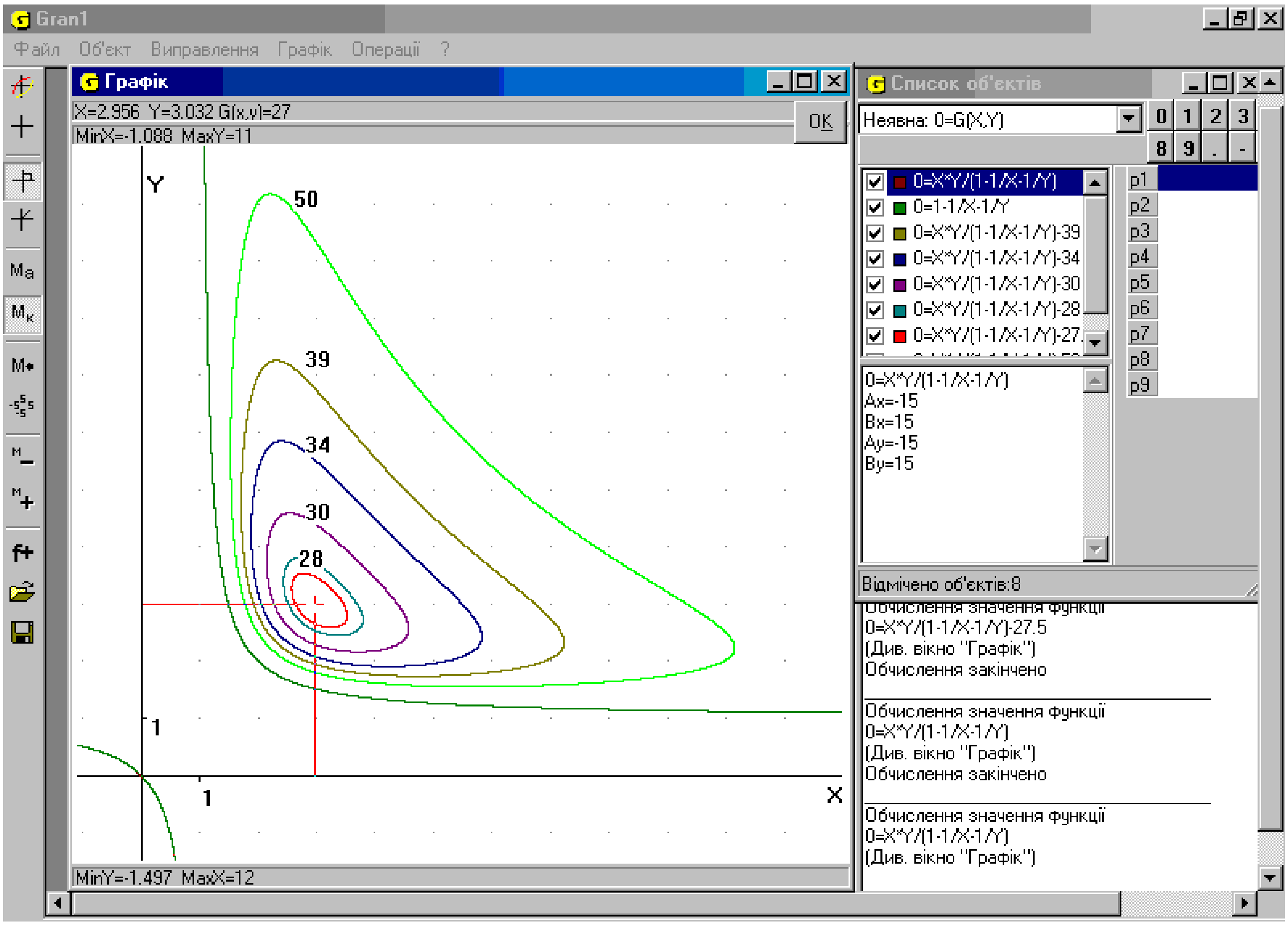

Рис. 3

6. Застосування поняття часткової границі функції за певної умови до однієї математичної моделі. В [3, с.166-173] побудована математична модель космічного суб’єкта, яка містить у собі рівняння “Реаліста”, тобто суб’єкта, вибір якого завжди реалістичний:

$$f(x,y) = x + (1 - x - y + xy)\, f(x,y),\ (x,y) \neq (0,0),$$

де $x \in [0;1]$ – ймовірнісна міра інтенсивності тиску на суб’єкт зовнішнього світу з метою “схилити” суб’єкта до вибору “добра”, $y \in [0;1]$ – ймовірнісна міра уявлення суб’єкта про цей тиск зовнішнього світу, а $f(x,y)$ – ймовірнісна міра здатності суб’єкта вибрати “добро”.

У випадку, коли $(x,y) \neq (0,0)$, проте $(x,y) \in [0;1] \times [0;1]$, рівняння “Реаліста” набуває вигляду

$$f(x,y) = \frac{x}{x + y - xy},\ (x,y) \in [0;1] \times [0;1],\ (x,y) \neq (0,0),$$

з якого випливає, що ймовірність, з якою суб’єкт вибирає “добро”, визначається значеннями x та y, коли $(x,y) \neq (0,0)$. Точка $(0,0)$ є так званою *точкою хаотичної поведінки суб’єкта.*

Розкриємо сутність хаотичної поведінки суб’єкта, використовуючи поняття часткової границі функції за умови. Для цього зауважимо, що: коли $x = 0$, а $y \in (0;1)$, то $f(x,y) = f(0,y) = 0$; коли $y = 0$, а $x \in (0;1)$, то $f(x,y) = 1$, тобто значень і 0, і 1 дана функція $f(x,y)$ набуває у будь-якому околі точки $(0,0)$. Якщо взяти яку-небудь послідовність (k_n) таку, що $1 > k_n \downarrow 0\ (n \to \infty)$, і розглянути функцію $f(x,y)$ коли $x + y = k_n$, $x \in [0;k_n]$, при кожному фіксованому $n \in \boldsymbol{N}$, то утвориться функція

$$f(x, k_n - x) = \frac{x}{k_n - x(k_n - x)} = \frac{x}{x^2 - k_n x + k_n},\ x \in [0;k_n],$$

яка є неперервною і зростаючою, коли $x \in [0;k_n]$, причому при $x = 0$ $f(0,k_n) = 0$, а при $x = k_n$ $f(k_n, k_n - k_n) = f(k_n, 0) = 1$. За теоремою Больцано – Коші множиною значень функції $f(x, k_n - x)$ є відрізок $[0;1]$. На рис. 4 зображено графіки функції $f(x, k_n - x)$, $x \in \boldsymbol{R}$, при $k_n = 0{,}5$, $k_n = 0{,}25$ і $k_n = 0{,}1$.

Таким чином, для будь-якого $a \in [0;1]$ існує точка (x_n, y_n), для якої $x_n + y_n = k_n$ і $f(x_n, y_n) = a$. Звідси випливає, що кожне число $a \in [0;1]$ є частковою границею функції $f(x,y)$ за умови $x + y \to 0$.

Тому в околі точки $(0,0)$ незначні зміни x (тиску зовнішнього світу) або y (уявлення суб'єкта про цей тиск) можуть призвести до вельми значної зміни здатності суб'єкта вибрати "добро". У цьому й полягає хаотичність поведінки суб'єкта.

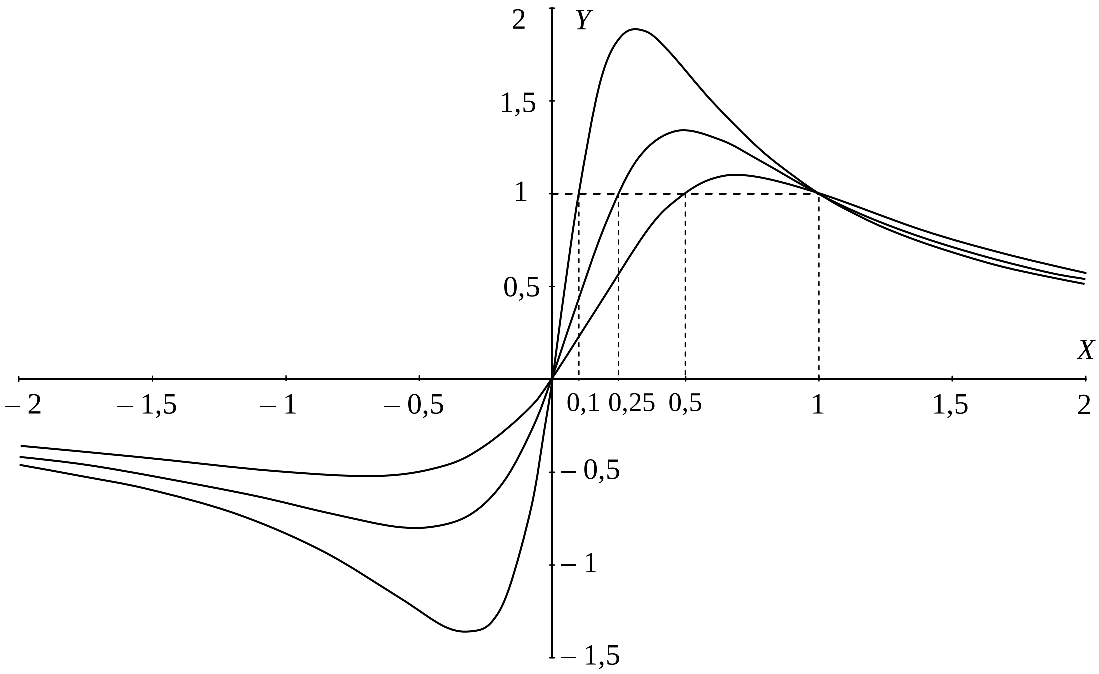

Рис. 4

Щоб проілюструвати застосування поняття повільно спадної функції (що є частинним випадком границі функції, яка має границю за умови) у теорії ймовірностей, доведемо наступну теорему.

7. Закон великих чисел для відносних частот. *Нехай:* 1) *Маємо довільну нескінченну серію незалежних випробувань, у кожному* i*-тому з яких подія* A *відбувається з відносною частотою* p_i, $i \in \boldsymbol{N}$; 2) $P_m^*(A) = \dfrac{k(m)}{m}$ *– можлива відносна частота події* A, *визначена за першими* m *випробуваннями, де* $k(m)$ *– кількість відбувань події* A *у перших* m *випробуваннях;* 3) $\Omega_1 = \{A, \overline{A}\}$, $\tilde{P}_1^*(A) = p_1$, $\tilde{P}_1^*(\overline{A}) = 1 - p_1$; 4) Ω_1^m *– декартів* m*-тий степінь простору* Ω_1, *тобто*

$$\Omega_1^m = \{E = (E_1, E_2, \ldots, E_m) : \ E_i = A \ \text{або} \ E_i = \overline{A}, \ i \in \overline{1,m}\};$$

5) $\tilde{P}_m^*(E) = \prod\limits_{k=1}^{k(m)} p_{i_k} \prod\limits_{k=1}^{m-k(m)} (1 - p_{\nu_k})$, *де*

$$E \in \Omega_1^m, \ \{i_k : k \in \overline{1, k(m)}\} = \{i \in \overline{1,m} : E_i = A\}, \ \text{а} \ \{\nu_k : k \in \overline{1, m - k(m)}\} = \{i \in \overline{1,m} : E_i = \overline{A}\};$$

6) $X(E) = P_m^*(A) = \dfrac{k(m)}{m}$, $E \in \Omega_1^m$. *Тоді* $X(E) = P_m^*(A)$ *– випадкова величина, визначена на просторі* Ω_1^m, *для якої правильні твердження:*

I) $\tilde{P}_m^*(\{E \in \Omega_1^m : |P_m^*(A) - \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} p_i| \geq \varepsilon\}) \leq \dfrac{1}{m\varepsilon^2}$;

II) *для того щоб існувало число* $p = P(A)$, *для якого*

$$\tilde{P}_m^*(\{E \in \Omega_1^m : |P_m^*(A) - p| \geq \varepsilon\}) \to 0, \ \text{коли} \ \varepsilon > 0 \ \text{– довільне фіксоване, а} \ m \to \infty,$$

необхідно й досить, щоб $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = p$.

Зауваження. Кожна відносна частота p_i визначається за результатом певної серії випробувань, у які обов'язково входить i-те випробування.

□ Якщо $m \in \boldsymbol{N}$ – довільне фіксоване число (кількість перших випробувань), а X_i – індикатор події A_i, – яка полягає в тому, що подія A відбувається в i-тому випробуванні, $i \in \overline{1,m}$, то $\tilde{P}_m^*(A_i) = p_i$, $\tilde{P}_m^*(\overline{A_i}) = 1 - p_i$, $\tilde{M}_m(X_i) = p_i$, $\tilde{D}_m(X_i) = p_i(1 - p_i)$. Окрім цього

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i = P_m^*(A),$$

$$\tilde{M}_m(P_m^*(A)) = \tilde{M}_m(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \tilde{M}_m(X_i) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} p_i,$$

$$\tilde{D}_m(P_m^*(A)) = \tilde{D}_m(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m} \tilde{D}_m(X_i) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m} p_i(1 - p_i) \leq \frac{1}{m^2} \cdot m = \frac{1}{m}.$$

Тому, враховуючи нерівність Чебишова, дістаємо твердження I):

$$\tilde{P}_m^*(\{E \in \Omega_1^m:\ P_m^*(A) - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m p_i \,|\geq \varepsilon\}) =$$

$$= \tilde{P}_m^*(\{E \in \Omega_1^m:\ |P_m^*(A) - \tilde{M}_m(P_m^*(A))|^2 \geq \varepsilon^2\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\tilde{D}_m(P_m^*(A)) \leq \frac{1}{m\varepsilon^2}.$$

Для доведення твердження II) припустимо, що існує число $p = P(A)$, для якого $\tilde{P}_m^*(\{E \in \Omega_1^m:$ $|P_m^*(A) - p| \geq \varepsilon\}) \to 0$, коли $1 > \varepsilon > 0$ – довільне фіксоване, а $m \to \infty$. Покладемо

$$A_{\varepsilon/2} = \{E \in \Omega_1^m : |P_m^*(A) - p| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \text{ і } B_{\varepsilon/2} = \{E \in \Omega_1^m : |P_m^*(A) - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m p_i| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Тоді для досить великих m $\tilde{P}_m^*(\Omega_1^m - (A_{\varepsilon/2} + B_{\varepsilon/2})) \geq 1 - \varepsilon > 0$, а тому множина $\Omega_1^m - (A_{\varepsilon/2} + B_{\varepsilon/2})$ є непорожньою. На цій множині виконуються нерівності $|P_m^*(A) - p| < \frac{\varepsilon}{2}$ і $|P_m^*(A) - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m p_i| < \frac{\varepsilon}{2}$, а тому й нерівність

$$|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m p_i - p| = |(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m p_i - P_m^*(A)) + (P_m^*(A) - p)| \leq$$

$$\leq |P_m^*(A) - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m p_i| + |P_m^*(A) - p| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

коли m досить велике. Це і означає, що $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m p_i \to p$, коли $m \to \infty$. Необхідність твердження II) доведено.

Доведемо достатність. Нехай $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m p_i \to p$, коли $m \to \infty$, $\varepsilon > 0$ – довільне фіксоване, $m_0 = m_0(\varepsilon)$ – таке, що $|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m p_i - p| < \frac{\varepsilon}{2}$, коли $m \geq m_0$, а $B_{\varepsilon/2}$ визначено вище. Тоді якщо $E \in \Omega_1^m - B_{\varepsilon/2}$, то

$$|P_m^*(A) - p| = |(P_m^*(A) - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m p_i) + (\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m p_i - p)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

коли $m \geq m_0$. Отже, нерівність $|P_m^*(A) - p| \geq \varepsilon$ виконується хіба що на множині $B_{\varepsilon/2}$, тобто коли $m \geq m_0$, то $\{E \in \Omega_1^m: |P_m^*(A) - p| \geq \varepsilon\} \subset B_{\varepsilon/2}$. Тому, враховуючи твердження I), маємо:

$$\tilde{P}_m(\{E \in \Omega_1^m : |P_m^*(A) - p| \geq \varepsilon\}) \leq \tilde{P}_m(B_{\varepsilon/2}) \leq \frac{4}{m\varepsilon^2} \to 0, \text{ коли } m \to \infty.$$

Достатність доведено.

Виявляється, що коли шукана ймовірнісна модель існує, тобто існує (проте невідома) ймовірність події A, то "майже напевно" знайти цю невідому ймовірність можна за допомогою границі $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty} p_i$. Разом з тим згідно твердження II) не виключається, що спроба знайти невідому ймовірність за цією границею може виявитися невдалою, проте якщо таких спроб зробити досить багато, то шанси знайти $P(A)$ за відносними частотами, тобто за формулою $P(A) = \lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m P_i^*(A)$, досить великі.

8. Приклад невдалої спроби знайти невідому ймовірність за відносними частотами. Нехай $P_n^*(A) = \frac{k(n)}{n}$, де $k(1) = k(2^0) = 0$,

$$k(n) = k(2^i - 1), \text{ коли } 2 \cdot 2^{i-1} \leq n < 2^i + 2^{i-1} = 3 \cdot 2^{i-1},$$

$$k(n) = k(n-1) + 1, \text{ коли } 3 \cdot 2^{i-1} \leq n < 2^{i+1} = 4 \cdot 2^{i-1},$$

тобто у кожному n-му випробуванні подія A не відбувається, коли n змінюється від $2 \cdot 2^{i-1}$ до $3 \cdot 2^{i-1} - 1$, та відбувається, коли n змінюється від $3 \cdot 2^{i-1}$ до $4 \cdot 2^{i-1} - 1$ (див. рис. 5).

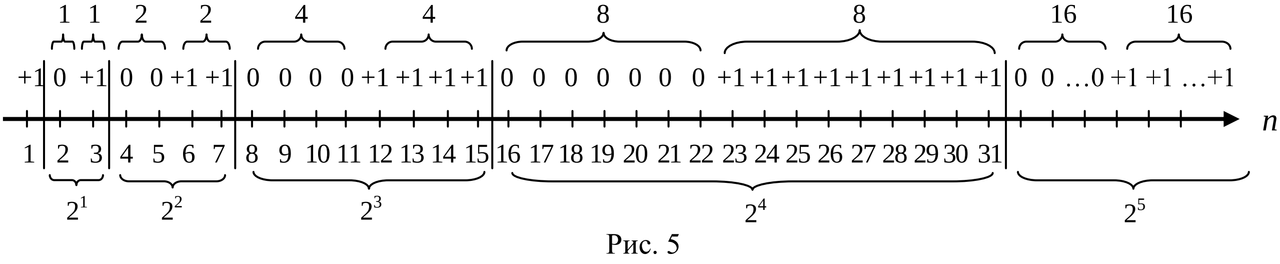

Рис. 5

Нехай n – довільне фіксоване натуральне число. Тоді:

- якщо $2\cdot 2^{i-1}\le n<3\cdot 2^{i-1}$ та $i\ge 2$, то $k(n)=1+2^1+\ldots+2^{i-2}=2^{i-1}-1$,
- якщо $3\cdot 2^{i-1}\le n<4\cdot 2^{i-1}$ та $i\ge 2$, то $k(n)=2^{i-1}-1+(n-3\cdot 2^{i-1}+1)=n-2^i$.

Тому $P_n^*(A)=\dfrac{k(n)}{n}=\dfrac{2^{i-1}-1}{n}$ – зменшується від $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^i}\approx\dfrac{1}{2}$ до

$$\frac{2^{i-1}-1}{3\cdot 2^{i-1}-1}=\frac{(2^{i-1}-\frac{1}{3})-\frac{2}{3}}{3(2^{i-1}-\frac{1}{3})}=\frac{1}{3}-\frac{2}{3(3\cdot 2^{i-1}-1)}\approx\frac{1}{3},$$

коли n збільшується від $2\cdot 2^{i-1}$ до $3\cdot 2^{i-1}-1$. При цьому

$$P_n^*(A)-P_{n+1}^*(A)=\frac{2^{i-1}-1}{n}-\frac{2^{i-1}-1}{n+1}=\frac{2^{i-1}-1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\in(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n+1};\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}),$$

тобто зменшення відбувається досить повільно, кроками порядку $\dfrac{1}{n+1}$.

Аналогічно маємо: $P_n^*(A)=\dfrac{k(n)}{n}=\dfrac{n-2^i}{n}=1-\dfrac{2^i}{n}$, і таким чином $P_n^*(A)$ збільшується від $1-\dfrac{2^i}{3\cdot 2^{i-1}}\approx\dfrac{1}{3}$ до

$$1-\frac{2^i}{2^{i+1}-1}=1-\frac{(2^i-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{2(2^i-\frac{1}{2})}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2^{i+1}-1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2^{i+1}-1)}\approx\frac{1}{2},$$

коли n збільшується від $3\cdot 2^{i-1}$ до $4\cdot 2^{i-1}-1$, причому

$$P_{n+1}^*(A)-P_n^*(A)=\frac{2^i}{n(n+1)}\in(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1};\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n+1}),$$

тобто це збільшення також відбувається досить повільно, кроками порядку $\dfrac{1}{n+1}$.

Таким чином, побудовані відносні частоти $P_n^*(A)$ події A із збільшенням n “повільно коливаються”, зростаючи від $\dfrac{1}{3}$ до $\dfrac{1}{2}$, а потім спадаючи від $\dfrac{1}{2}$ до $\dfrac{1}{3}$, причому крок спадання чи зростання має порядок $\dfrac{1}{n+1}$. Точніше,

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n+1}\le\left|P_{n+1}^*(A)-P_n^*(A)\right|\le\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n+1}.$$

Звідси випливає, що послідовність { $P_n^*(A)$ } є повільно спадною у розумінні означення, даного в пункті 2, оскільки

$$\left|P_m^*(A)-P_n^*(A)\right|=\left|P_m^*(A)-P_{m-1}^*(A)+P_{m-1}^*(A)-P_{m-2}^*(A)+\ldots+P_{n+1}^*(A)-P_n^*(A)\right|\le$$
$$\le\left|P_m^*(A)-P_{m-1}^*(A)\right|+\left|P_{m-1}^*(A)-P_{m-2}^*(A)\right|+\ldots+\left|P_{n+1}^*(A)-P_n^*(A)\right|\le$$
$$\le\frac{2}{3}\cdot(\frac{1}{m}+\frac{1}{m-1}+\ldots+\frac{1}{n+1})=\frac{2}{3}\ln\frac{m}{n}+\alpha_{m,\,n}\to 0,\ \text{коли}\ 1<\frac{m}{n}\to 1.$$

Нехай X_i – індикатор події A в i-тому випробуванні, коли подія A відбувається з імовірністю $p_i=P_i^*(A)$, де $P_i^*(A)$ – це i-тий член побудованої послідовності ймовірнісних мір $P_n^*(A)$. Тоді, згідно з доведеним законом великих чисел для відносних частот,

$$\tilde{P}_m^*\left(\left|P_m^*(A)-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m p_i\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{1}{m\varepsilon^2},$$

тобто при фіксованому m “майже всі” значення випадкової величини $P_m^*(A)$ скупчуються біля точки $M_m=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^m p_i$.

Разом з тим, точки M_m із зростанням m не стабілізуються біля якоїсь фіксованої точки $P(A)$, не залежної від m. Це випливає з відомої тауберової теореми М. О. Давидова [4] (див. також роботу [5]), в силу якої послідовність (M_m) повільно коливається від нижньої границі $\varliminf\limits_{m\to\infty}M_m$ до верхньої границі $\varlimsup\limits_{m\to\infty}M_m$, причому

$$\frac{1}{3}\le\varliminf_{m\to\infty}M_m<\varlimsup_{m\to\infty}M_m\le\frac{1}{2}.$$

Тому повільне коливання послідовності $P_n^*(A)$ не дає права вважати якесь значення, що лежить в даному прикладі у межах від $\frac{1}{3}$ до $\frac{1}{2}$, "більш можливим", ніж інші значення з проміжку $[\frac{1}{3};\frac{1}{2}]$.

9. Приклад вдалої спроби знайти невідому ймовірність за відносними частотами. З доведеного закону великих чисел випливає, що висновок про стабілізацію "майже всіх" значень випадкової величини $P_m^*(A)$ біля фіксованої точки, не залежної від m, можна зробити і тоді, коли побудовані за допомогою серій випробувань відносні частоти p_i не збігаються до якоїсь точки $P(A)$, проте змінюються "досить правильно": настільки, щоб існувала скінченна границя $\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}p_i = P(A)$.

Наприклад, виконуючи серії по два випробування (по два рази підкидається монета) теоретично можна дістати: $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = p_4 = 1$, …, $p_{4i-3} = p_{4i-2} = 0$, $p_{4i-1} = p_{4i} = 1$, $i \in \boldsymbol{N}$. Тоді легко бачити, що коли $m = 4k$, то $M_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}p_i = \frac{2k}{4k} = \frac{1}{2}$; коли $m = 2k+1$, то $M_m = \frac{2k-1}{4k-1} \to \frac{1}{2}$ $(k\to\infty)$; коли $m = 4k-2$, то $M_m = \frac{2k-2}{4k-2} \to \frac{1}{2}$ $(k\to\infty)$; нарешті, коли $m = 4k-3$, то $M_m = \frac{2k-2}{4k-3} \to \frac{1}{2}$ $(k\to\infty)$.

Отже, $M_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}p_i \to \frac{1}{2}$ $(m\to\infty)$, а тому за законом великих чисел для відносних частот "майже всі" значення $P_m^*(A)$ стабілізуються біля числа $1/2$, яке природно вважати ймовірністю події A.

10. Зв'язок з означенням ймовірності за Р. Мізесом. З твердження II) доведеного закону великих чисел та згаданої тауберової теореми випливає, що *коли відносні частоти* $p_i = P_i^*(A)$ *визначаються за першими* i *випробуваннями (з даної як завгодно довгої серії випробувань), то для того щоб існувало число* $p = P(A)$*, для якого* $\tilde{P}_m^*(\{E\in\Omega_1^m : |P_m^*(A) - p| \geq \varepsilon\}) \to 0$*, коли* $\varepsilon > 0$ *– довільне фіксоване, а* $m\to\infty$*, необхідно й досить, щоб* $\lim_{i\to\infty}P_i^*(A) = p$.

Цей факт можна вважати певним обґрунтуванням доцільності використання означення ймовірності за Р. Мізесом [6, с. 218].

11. Висновки. Математика вивчає зокрема математичні моделі реальних об'єктів та явищ, а теорія ймовірностей (як частина математики) вивчає математичні моделі реальних випадкових явищ. У математичній моделі виділяють з усіх властивостей досліджуваного об'єкта або явища лише окремі, а всіма іншими нехтують. Завдяки цьому одна і та сама математична модель застосовна до вивчення різних об'єктів і явищ, які на перший погляд не мають нічого спільного.

Разом з тим кожна математична модель – це лише наближення певної реальності, яке може виявитися недостатнім.

Комп'ютерні засоби математики дозволяють унаочнити математичні моделі, завдяки чому пришвидшується процес розв'язування багатьох задач. Разом з тим, без володіння фундаментальними математичними теоріями правильно розв'язати навіть досить прості математичні задачі за допомогою комп'ютерних засобів математики іноді неможливо.

ЛІТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, Т. 3. – М.: Наука, 1966. – 607 с., 666 с.
2. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 1–2. – М.: Наука, 1969. –528 с.
3. Лефевр В. А. Рефлексия. – М.: «Когито-Центр», 2003. – 496 с.
4. Давыдов Н. А. Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов // Мат. сб. – 1956. – 38 (80), вып. 4. – С. 509-524.
5. Михалин Г. А., Тесленко Л. С. Об одном свойстве одного класса $(\bar{R}, p_n, \alpha)$-методов суммирования рядов и теоремы тауберова типа // Укр. мат. журн. – 1977. – Т. 29. – № 2. – С. 194 – 203.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1. – М.: Мир, 1984. – 528 с.