С.Л. Надточій
НПУ імені М.П. Драгоманова

Використання педагогічних програмних засобів у навчанні студентів теорії ймовірностей і математичної статистики

1. Вступ. Освіта і наука завжди були, є і будуть фундаментом людського розвитку та прогресу суспільства, вони забезпечують індивідуальний розвиток особистості, інтелектуальний потенціал держави. Сьогодні в Україні здійснюються кроки щодо забезпечення прискореного інноваційного розвитку освіти, а також створюються умови для самореалізації та самоствердження особистості протягом життя. Відповідно до Національної доктрини розвитку освіти, її пріоритетом є впровадження сучасних інформаційно-комунікаційних технологій, що забезпечує подальше удосконалення навчально-виховного процесу, доступність та ефективність освіти, підготовку молодого покоління до життєдіяльності в інформаційному суспільстві [1]. Використання сучасних програмних засобів у навчальному процесі звільняє від рутинних технічних операцій, дозволяє зосередити увагу саме на тих проблемах, що складають зміст глибоких математичних теорій. Можливо, таке зосередження є цікавим і доступним не для всіх студентів і тому завдяки використанню програмних засобів викладач має можливість проводити індивідуальну роботу зі своїми студентами, дотримуватись принципів індивідуалізації та диференціації навчання.

Застосування інформаційних технологій у навчанні різних дисциплін майбутніх вчителів набуває особливого значення, оскільки це сприятиме тому, що вони будуть використовувати такі технології у своїй професійній діяльності, а також привчатимуть і своїх учнів застосовувати різні інформаційні технології як інструмент навчальної і професійної діяльності.

У посібнику [2] розглянута можливість використання комп’ютера та програми GRAN1 для супроводу навчання математики, в тому числі елементів стохастики, в середніх навчальних закладах.

У статті [3] наведено деякі задачі теорії ймовірностей і математичної статистики та алгоритми їх розв’язування за допомогою програмного засобу – електронних таблиць Microsoft Excel.

Методиці навчання елементів стохастики учнів середніх шкіл присвячені роботи М.Й. Ядренка, М.І. Жалдака, Г.О. Михаліна, Я.С. Бродського, З.І. Слєпкань, І.С. Соколовської, Т.М. Хмари та ін.

Дана стаття присвячена дослідженню можливостей застосування інформаційних технологій у навчанні теорії ймовірностей і математичної статистики студентів педагогічних університетів.

2. Використання ППЗ у курсі теорії ймовірностей і математичної статистики. При навчанні студентів теорії ймовірностей і математичної статистики можна ефективно використовувати педагогічні програмні засоби (ППЗ) при вивченні таких тем:

1) *Функція розподілу та щільність розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини* (завдання на встановлення, чи може дана функція бути функцією розподілу чи щільністю розподілу ймовірностей для деякої випадкової величини).

В цьому випадку ППЗ використовуються для побудови графіків даних функцій та обчислення визначених інтегралів. Тому можна запропонувати такі програмні засоби, як GRAN1 чи FNGraph. Обидві програми прості у використанні, проте перша оснащена досить зручним україномовним інтерфейсом. Ще однією перевагою ППЗ GRAN1 є можливість використовувати у записі виразу функції чи меж інтегрування динамічних параметрів. Зміна будь-якого з них призводить до перебудови графіків тих об’єктів, що містять цей параметр. Тому у більшості випадків доцільно надавати перевагу ППЗ GRAN1.

2) *Нормальний розподіл ймовірностей* (побудова графіка щільності розподілу ймовірностей, дослідження зміни його вигляду при зміні параметрів, задачі на знаходження ймовірності попадання значень нормально розподіленої випадкової величини у заданий проміжок та оберненої до неї задачі, демонстрація „правила трьох сигм”).

Для розв’язування таких задач за допомогою GRAN1 достатньо створити одну динамічну модель і в кожному випадку підставляти відповідні дані.

Деякі задачі з цієї теми розглянуті у статті [4].

3) *Основні задачі математичної статистики* (побудова полігону, гістограми, емпіричної функції розподілу ймовірностей, обчислення вибіркових характеристик, перевірка гіпотези про рівність двох розподілів за критерієм Пірсона).

Всі рутинні обчислення, які без застосування обчислювальних засобів вимагають дуже багато часу, практично миттєво виконуються за допомогою комп’ютера. Це дозволяє приділити цій темі достатню увагу, що без використання комп’ютера практично неможливо.

Зараз існує багато спеціалізованих пакетів статистичного опрацювання даних. Разом з тим, використання ППЗ GRAN1 або пакету Microsoft Excel таке опрацювання може забезпечити досить повно.

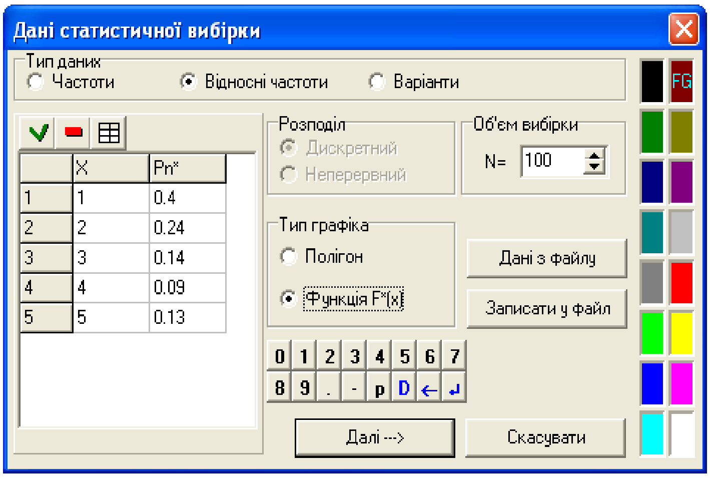


Рис. 1

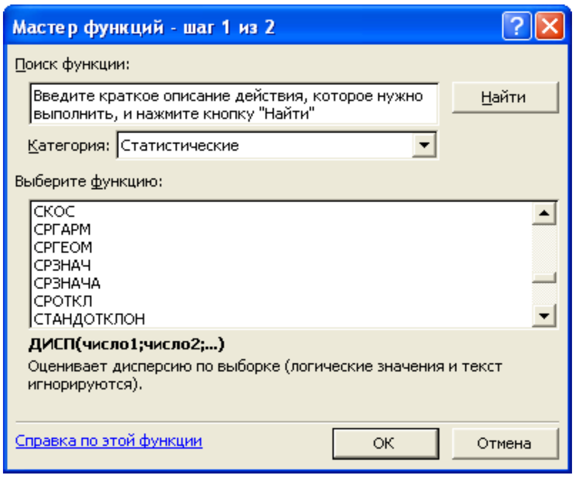


Рис. 2

Для опрацювання статистичних даних у програмі GRAN1 передбачений спеціальний тип залежності – „*Статистична вибірка*”. При створенні нового об’єкта цього типу у вікні „*Дані статистичної вибірки*” (рис. 1) за допомогою радіокнопок потрібно вибрати *Розподіл* (дискретний чи неперервний), *Тип даних* (частоти, відносні частоти чи варіанти), *Тип графіка* (полігон – для дискретного, гістограма – для неперервного чи емпірична функція розподілу ймовірностей $F^*(x)$).

У пакеті Microsoft Excel є цілий ряд „статистичних функцій”, які можна використовувати для опрацювання статистичних даних (Рис. 2), а також набір інструментів для роботи з кількома вибірками та поглибленого аналізу даних, так званий *Пакет аналізу* (Рис. 3) [5].

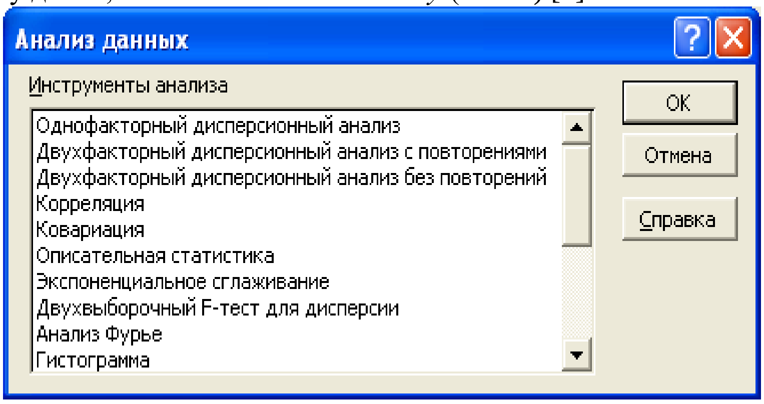


Рис. 3

3. Приклади задач. Розглянемо кілька задач.

Як відомо, одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття випадкової величини, а одним із засобів описування розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини є відповідна функція розподілу ймовірностей. Нехай *X* – випадкова величина, тоді функцію $F_X(x)=P\{E\in\Omega: X(E)<x\}$ називають функцією розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини *X*. Вона має такі *характеристичні властивості*:

1. $F(x)\ge 0,\ \ x\in(-\infty;\infty)$.
2. $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$.
3. $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.
4. Неспадна, тобто якщо $x_1<x_2$, то $F(x_1)\le F(x_2)$.
5. Неперервна зліва в кожній точці, тобто $F(x-0)=F(x)\ \ \forall x\in R$.

Кожну функцію *F*, що задовольняє наведені властивості, можна розглядати як функцію розподілу ймовірностей для деякої випадкової величини. Саме тому властивості 1-5 називають характеристичними.

Якщо ймовірнісна міра P зосереджена в точках x_1, x_2, ...:

$$P(\{x_k\})=F(x_k+0)-F(x_k)=\Delta F(x_k)\ \text{ і }\ \sum_k P(\{x_k\})=1,$$

то цю міру і відповідну функцію розподілу ймовірностей $F(x)$ називають *дискретною*. Розподіл ймовірностей на множині Ω=(–∞; +∞), що описується дискретною функцією розподілу ймовірностей, також називається *дискретним розподілом ймовірностей* на множині Ω.

При цьому, якщо значення x_k впорядковані за зростанням (наприклад, $x_1< x_2<$...), то функція $F(x)$ дискретного розподілу ймовірностей є кусково сталою і має принаймні один розрив першого роду.

Якщо функція $F(x)$ розподілу ймовірностей неперервна, то відповідний *розподіл ймовірностей* називають *неперервним*.

Якщо функцію $F(x)$ розподілу ймовірностей на множині $(-\infty,\infty)$ можна задати рівністю $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt,\ \ x\in R$, за допомогою функції $f(x)$ – *щільності розподілу ймовірностей*, причому: 1) $f(x)\ge 0$ і 2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$ (*характеристичні властивості щільності розподілу ймовірностей*), то такий *розподіл* називається *абсолютно неперервним*.

При цьому $f(x)=F'(x)$ майже скрізь на $(-\infty,\infty)$.

Неперервна *функція розподілу* ймовірностей $F(x)$, для якої майже скрізь $F'(x)=0$, не є абсолютно неперервною і називається *сингулярною*. Відповідний їй *розподіл ймовірностей* також називається *сингулярним*.

Виявляється, що довільну функцію розподілу ймовірностей можна подати у вигляді

$$F(x)=a_1F_1(x)+a_2F_2(x)+a_3F_3(x),$$

де $F_1(x)$ – дискретна, $F_2(x)$ – абсолютно неперервна, $F_3(x)$ – сингулярна функції розподілу; $a_1+a_2+a_3=1,\ a_i\ge 0,\ i=1,2,3$. Якщо при цьому всі $a_i<1$, то відповідний *розподіл ймовірностей* називають *мішаним*.

Задача 1.

1. З'ясувати, які з поданих нижче функцій є функціями розподілу ймовірностей:

1) $F(x)=e^{-e^{-x}}$; 2) $F(x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2\pi}arctgx$; 3) $F(x)=A\cdot(\pi-arcctgx)$;

4) $F(x)=\begin{cases}0, & якщо\ \ x\le 0,\\ A\cdot\sqrt{x}, & якщо\ \ x>0;\end{cases}$ 5) $F(x)=\begin{cases}sign(x)+1, & якщо\ \ x<0,\\ sign(x), & якщо\ \ x\ge 0;\end{cases}$

6) $F(x)=\begin{cases}0, & якщо\ \ x\le -1,\\ \{x\}, & якщо\ \ -1<x\le 0,\\ 1, & якщо\ \ x>0;\end{cases}$ 7) $F(x)=\begin{cases}0, & якщо\ \ x\le 1,\\ A\cdot\sqrt{2(x-1)}, & якщо\ \ 1<x\le 9,\\ 1, & якщо\ \ x>9;\end{cases}$

8) $F(x)=\begin{cases}0, & якщо\ \ x\le -1,\\ [x]+\dfrac{5}{4}, & якщо\ \ -1<x<0,\\ \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}+\dfrac{1}{4}, & якщо\ \ 0\le x\le 1,\\ \dfrac{3}{4}, & якщо\ \ 1<x\le 2,\\ 1, & якщо\ \ x>2;\end{cases}$ 9) $F(x)=\begin{cases}0, & якщо\ \ x\le 0,\\ \dfrac{x}{4}, & якщо\ \ 0<x\le 4,\\ 1, & якщо\ \ x>4;\end{cases}$

10) $F(x)=\begin{cases}0, & якщо\ \ x\le 1,\\ 1-A\cdot e^{-A(x-1)}, & якщо\ \ x>1;\end{cases}$ 11) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-\dfrac{1-e^{-x}}{x}, & x>0.\end{cases}$

2. Якщо $F(x)$ є функцією розподілу ймовірностей, то побудувати її графік і визначити, який розподіл вона задає: дискретний, неперервний чи абсолютно неперервний.

Розв'язання. Щоб встановити, чи є дана функція функцією розподілу ймовірностей деякої випадкової величини, треба перевірити, чи задовольняє вона наведені вище характеристичні властивості. Якщо аналітична перевірка викликає труднощі – може допомогти графік функції. Отже, побудуємо графіки даних функцій і з їх допомогою встановимо, чи виконуються наведені властивості для кожної з них.

Задачі 3), 4), 7), 10), які містять параметр *А*, доцільно розв'язувати з допомогою ППЗ GRAN1, задачу 5) з функцією *sign*(*x*) – з допомогою програми FNGraph, для решти задач можна використовувати будь-яку з цих програм.

1, 2. З рис. 4 видно, що, мабуть, обидві функції неперервні і неспадні, але для другої, скоріш за все, не виконується друга властивість функції розподілу ймовірностей. Переконавшись, що для цієї функції $F(-\infty)=0{,}5\ne 0$, робимо висновок, що функція 2) не є функцією розподілу ймовірностей. Функція 1), як підтверджує перевірка властивостей, є функцією неперервного розподілу ймовірностей деякої випадкової величини. А існування інтегровної похідної від $F(x)$ на всій числовій прямій говорить про те, що $F(x)$ задає абсолютно неперервний розподіл. Разом з тим, якщо $F'(x)$ існує лише майже скрізь, то це не гарантує абсолютної неперервності $F(x)$. Вона може бути й сингулярною. Тому треба перевіряти рівність $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} F'(t)dt$.

3. Змінюючи значення параметра A (в GRAN1 йому відповідає $P1$), а також зменшуючи масштаб та крок зміни параметра, можна встановити, що лише при $A \approx 0{,}3183$ (точне значення – $\frac{1}{\pi}$) $F(x)$ є функцією розподілу ймовірностей, причому розподіл буде неперервним (Рис. 5). Оскільки $F'(x)$ існує $\forall x \in R$ і є неперервною функцією, то $F(x)$ задає абсолютно неперервний розподіл ймовірностей.

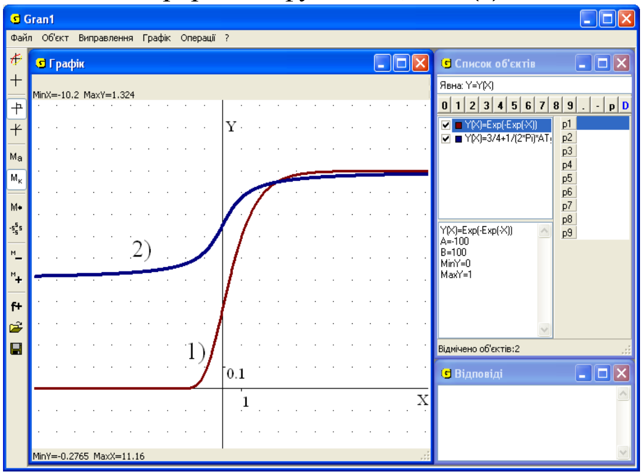


Рис. 4. До задач 1.1 і 1.2

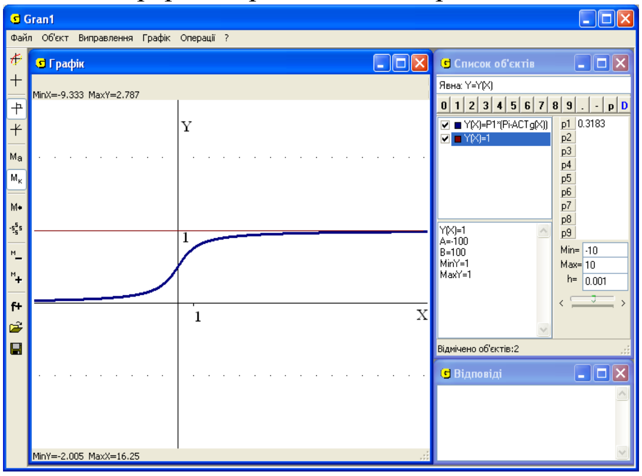


Рис. 5. До задачі 1.3

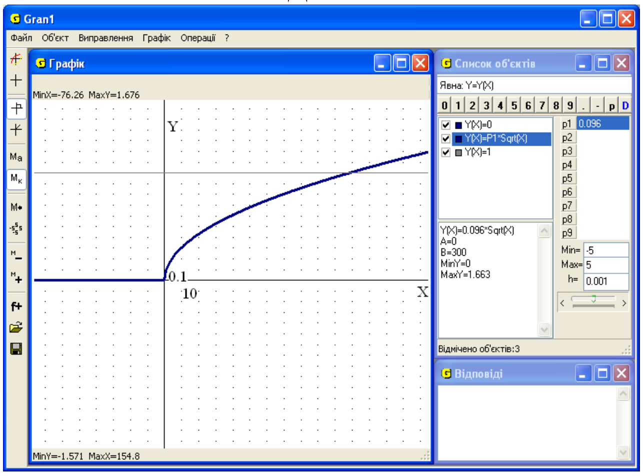


Рис. 6. До задачі 1.4

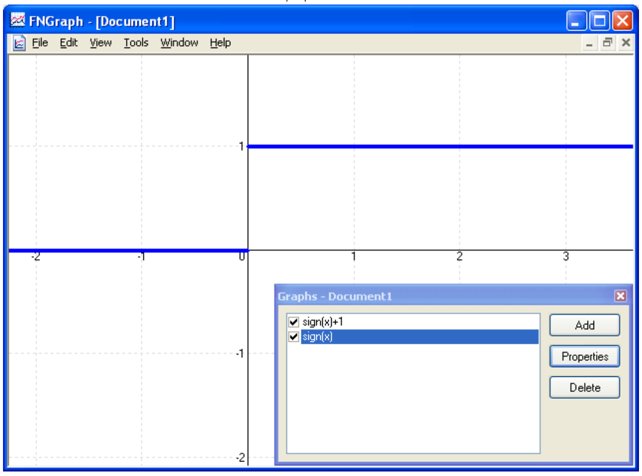


Рис. 7. До задачі 1.5

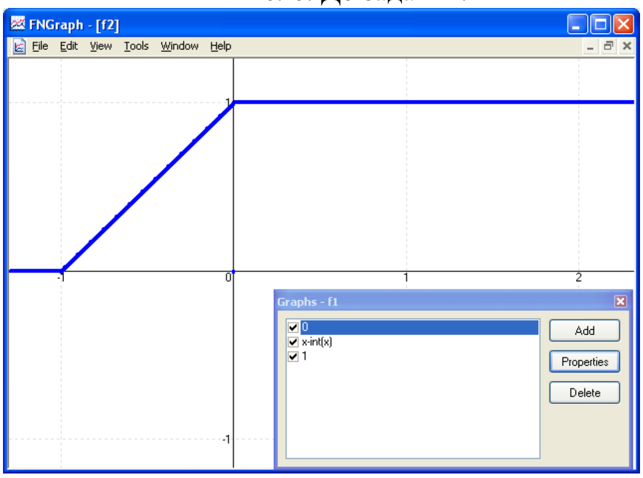


Рис. 8. До задачі 1.6

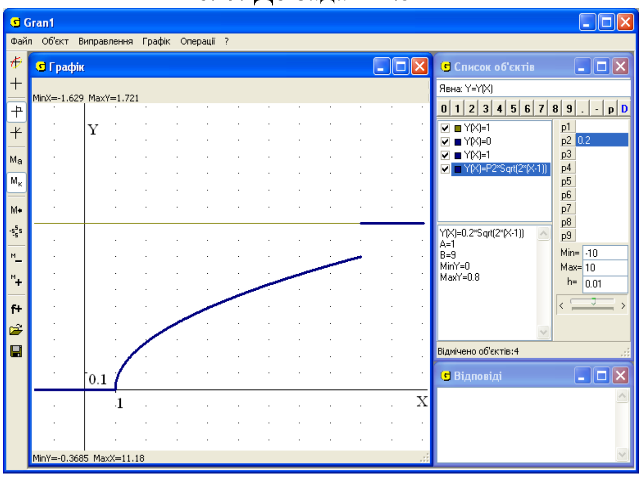
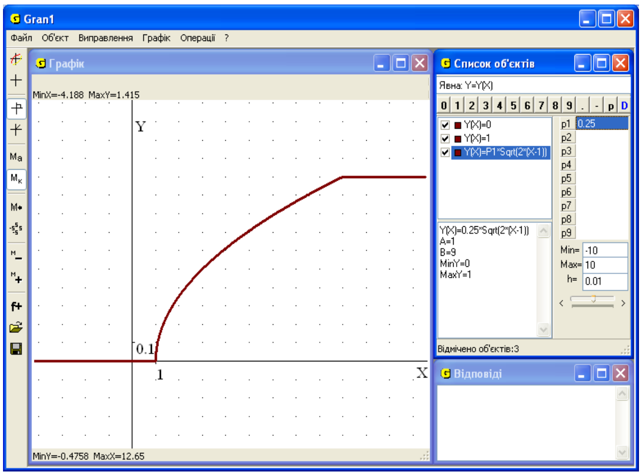


Рис. 9. До задачі 1. 7



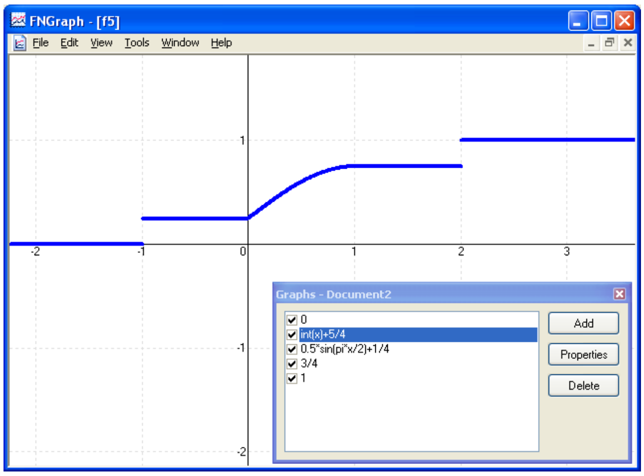
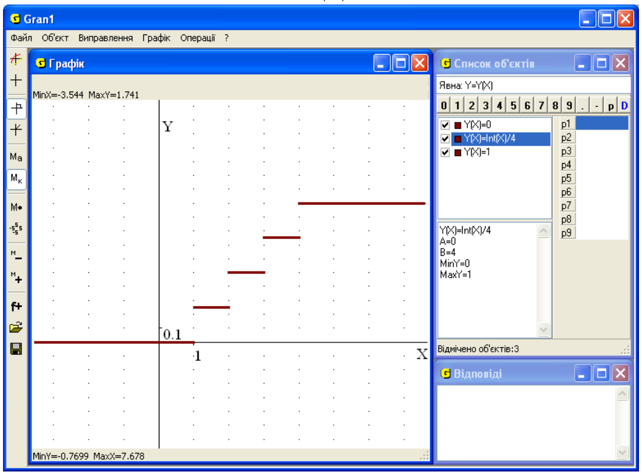


Рис. 10. До задачі 1.7

Рис. 11. До задачі 1.8



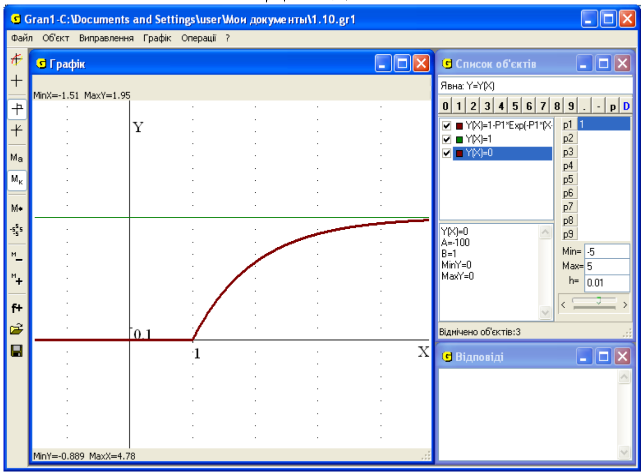
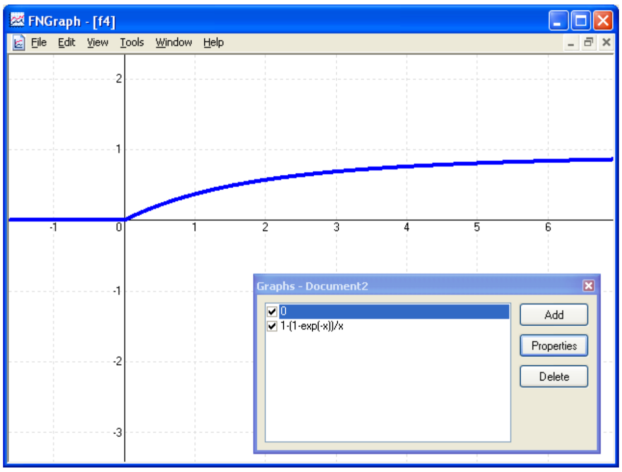


Рис. 12. До задачі 1.9

Рис. 13. До задачі 1.10



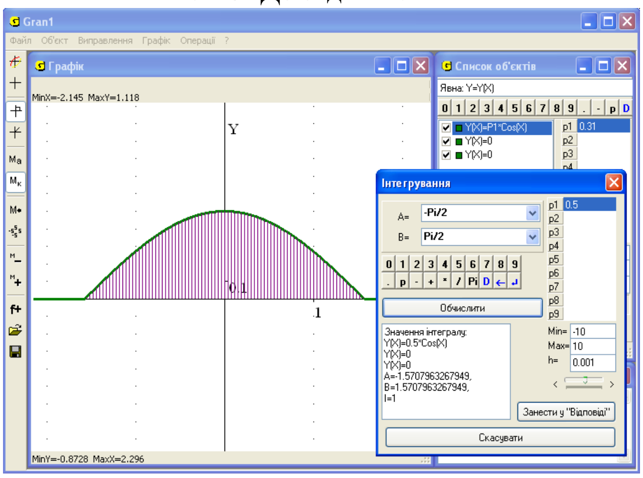


Рис. 14. До задачі 1.11

Рис. 15. До задачі 2.1

4. При будь-якому значенні параметра A функція $F(x)$ не буде функцією розподілу ймовірностей (при $A \geq 0$ порушується третя властивість функції розподілу, при $A < 0$ – третя і четверта) (Рис. 6).

5. $F(x)$ є функцією розподілу ймовірностей, причому розподіл буде дискретним (Рис. 7 і додаткова перевірка лівосторонньої неперервності функції у точці $x = 0$).

6. $F(x)$ не є функцією розподілу ймовірностей, оскільки порушуються четверта і п’ята властивості ($F(0–0)=F(0+0)=1$, але $F(0)=0$) (Рис. 8). Разом з тим, перевизначивши цю функцію в нулі, поклавши $F(0)=1$, перетворимо $F(x)$ в абсолютно неперервну функцію розподілу ймовірностей.

7. При $0 \leq A \leq 0{,}25$ $F(x)$ є функцією розподілу ймовірностей, причому при $A = 0$ розподіл буде дискретним, при $A = 0{,}25$ – неперервним (існування інтегровної похідної $F'(x)$, коли $x \neq 1$, $x \neq 9$, для якої $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} F'(t)dt$ говорить про абсолютно неперервний розподіл), при $0 < A < 0{,}25$ – мішаним (Рис. 9, 10). При інших значеннях параметра A порушується четверта властивість функції розподілу (функція не є неспадною).

8. $F(x)$ є функцією розподілу ймовірностей, причому розподіл буде мішаним (Рис. 11 і додаткова перевірка лівосторонньої неперервності функції у точках розриву).

9. $F(x)$ не є функцією розподілу ймовірностей, оскільки порушується друга умова (в точках розриву функція є неперервною справа і не є неперервною зліва) (Рис. 12).

10. При $0 \le A \le 1$ $F(x)$ є функцією розподілу ймовірностей, причому при $A = 0$ розподіл буде дискретним, при $A = 1$ – неперервним (навіть абсолютно неперервним, оскільки $F'(x)$ існує $\forall x \ne 1$ і $F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt$), при $0 < A < 1$ – мішаним (Рис. 13). Якщо $A < 0$, то $F(+\infty) = +\infty$, тобто порушується третя властивість функції розподілу ймовірностей, а якщо $A > 1$, функція не є неспадною.

11. $F(x)$ є функцією розподілу ймовірностей, причому розподіл буде абсолютно неперервним (Рис. 14), оскільки $F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt$.

Зауважимо, що частина студентів не може розв'язати подібну задачу не тому, що не знає властивостей функції розподілу, а тому, що не може дослідити дану функцію; побудувавши ж її графік за допомогою ППЗ – студенти можуть досить швидко знайти правильну відповідь на поставлене питання.

Разом з тим, не варто перебільшувати роль і можливості використання ППЗ, ігноруючи інші засоби навчання. Так, робити висновок про лівосторонню неперервність функцій у точках розриву можна лише після додаткової перевірки. На графіках, побудованих з допомогою ППЗ, цього не видно (Рис. 7, 9, 11, 12). Але такі графіки можуть дати студентам ідею про зміну заданої функції таким чином, щоб вона стала функцією розподілу ймовірностей (наприклад, функції 2), 6), 9)). Більш того, говорити про виконання будь-якої властивості функції розподілу ймовірностей, виходячи лише з побудованої частини її графіка, не можна, потрібне аналітичне дослідження.

У всіх розглянутих випадках, де розподіл був неперервним, він був і абсолютно неперервним. Після розв'язування цієї задачі можна запропонувати студентам навести приклад неперервної функції розподілу, яка не є абсолютно неперервною. Для детальнішого ознайомлення з сингулярними функціями студентам з високим рівнем підготовки можна порекомендувати додаткову літературу, наприклад [6; 7].

Отже, використання ППЗ GRAN1 дозволило для одних функцій легко одержати відповідь, а для інших – сформулювати робочу гіпотезу, обґрунтування якої потребує інших засобів.

Задача 2. З'ясувати, коли задана функція $f(x)$ є щільністю розподілу ймовірностей:

1) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |x| > \dfrac{\pi}{2}, \\ A \cdot \cos x, & \text{якщо } |x| \le \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right], \\ A \cdot tgx, & \text{якщо } x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0 \text{ або } x \ge A, \\ arctgx, & \text{якщо } x \in (0; A); \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |x| \ge A, \\ arctgx, & \text{якщо } |x| < A; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ A \cdot e^{-Ax}, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ A \cdot e^{Ax}, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$

7) $f(x) = e^{-(e^{-Ax} + Ax)}$;

8) $f(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Розв'язання. Для розв'язання задачі потрібно перевірити виконання характеристичних властивостей щільності розподілу ймовірностей для кожної функції.

Оскільки всі задачі містять параметр, то подамо їх розв'язання з використанням ППЗ GRAN1.

1. Змінюючи значення параметра A (*P1* у GRAN1), легко бачити, що перша властивість щільності розподілу ймовірностей виконується при $A \ge 0$, а виконання обох властивостей – при $A = 0{,}5$ (Рис. 15). Тобто при $A = 0{,}5$ функція $f(x)$ є щільністю розподілу ймовірностей.

2. Застосування GRAN1 наводить на думку, що при $A \approx 2{,}886$ функція $f(x)$, мабуть, є щільністю розподілу ймовірностей (Рис. 16). Обчислюючи інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ і прирівнюючи його до 1, дістанемо точне значення параметра A: $A = \dfrac{2}{\ln 2}$.

3. Аналогічно приходимо до висновку, що при $A \approx 1{,}6155$ дана функція $f(x)$, мабуть, є щільністю розподілу ймовірностей (Рис. 17). Розв'язуючи рівняння $\int_{0}^{A} f(x)dx = 1$, одержуємо, що A є коренем рівняння $A \cdot arctgA - 0{,}5\ln(1 + A^2) = 1$, яке важко розв'язати без комп'ютера.

4. Оскільки функція $y = arctg\, x$ непарна, то при будь-якому значенні параметра A функція $f(x)$ не є щільністю розподілу ймовірностей.

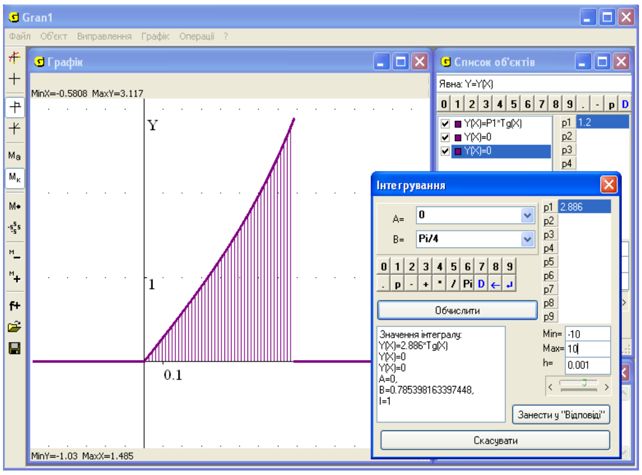


Рис. 16. До задачі 2.2

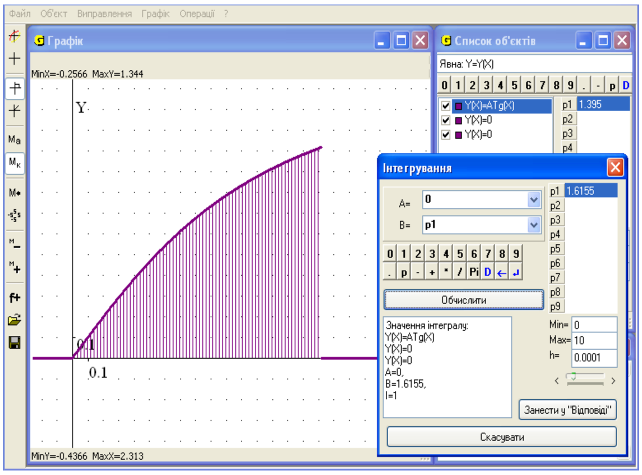


Рис. 17. До задачі 2.3

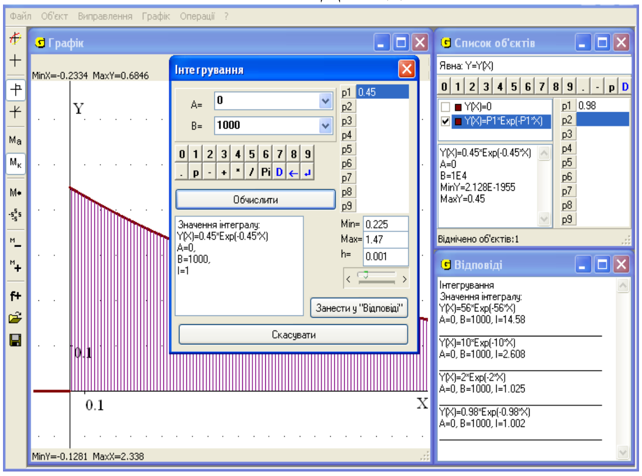


Рис. 18. До задачі 2.5

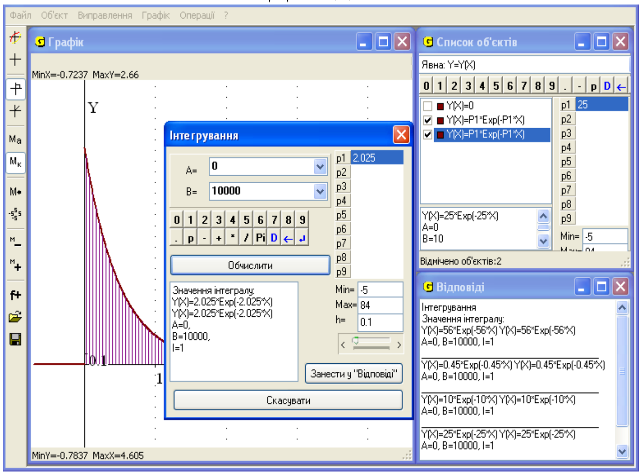


Рис. 19. До задачі 2.5

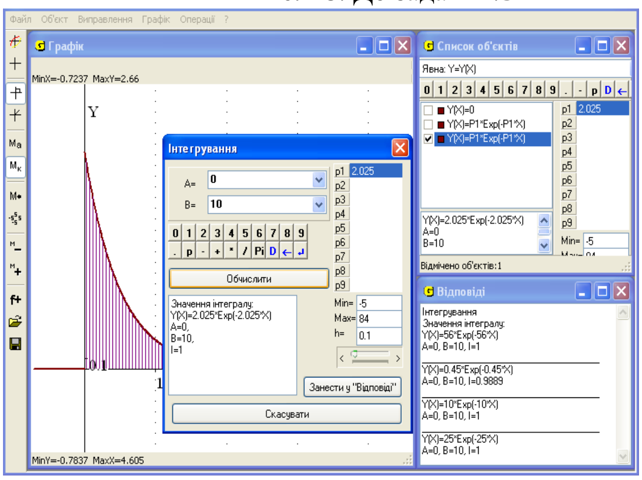


Рис. 20. До задачі 2.5

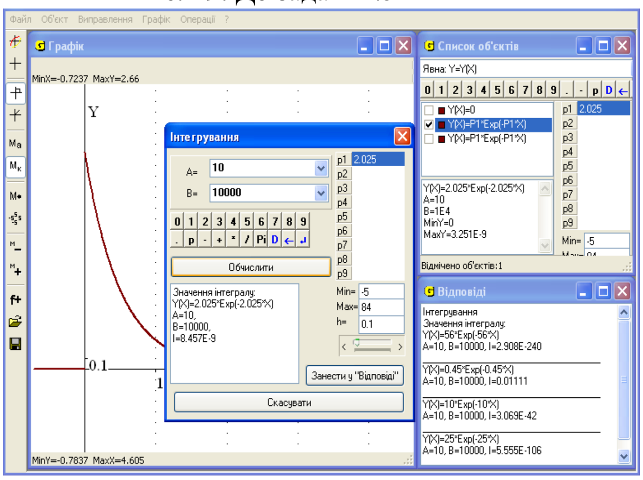


Рис. 21. До задачі 2.5

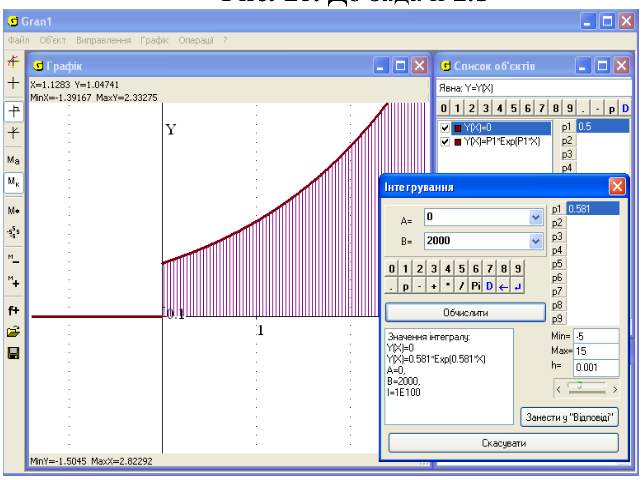


Рис. 22. До задачі 2.6

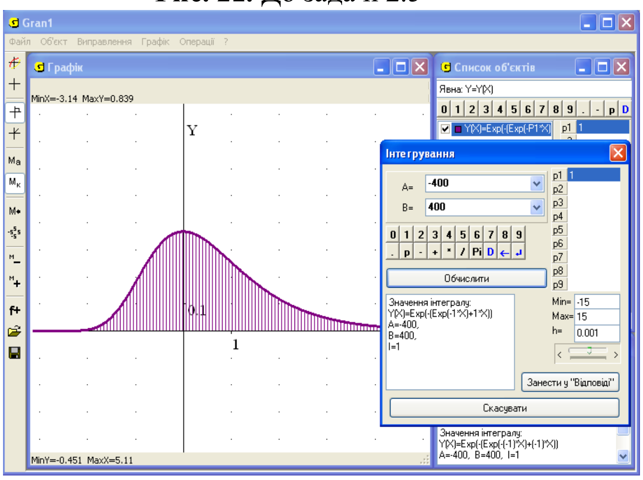


Рис. 23. До задачі 2.7

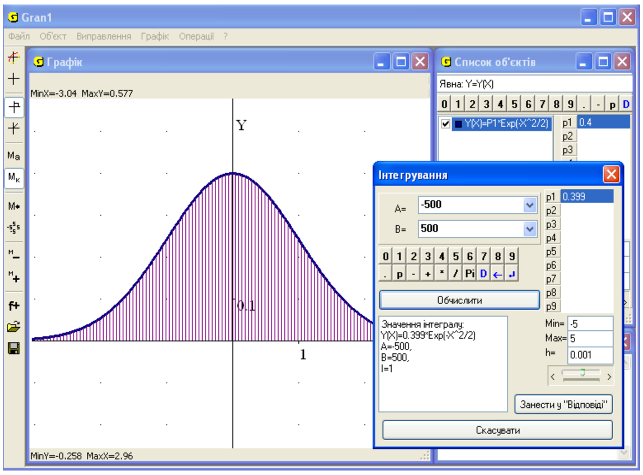


Рис. 24. До задачі 2.8

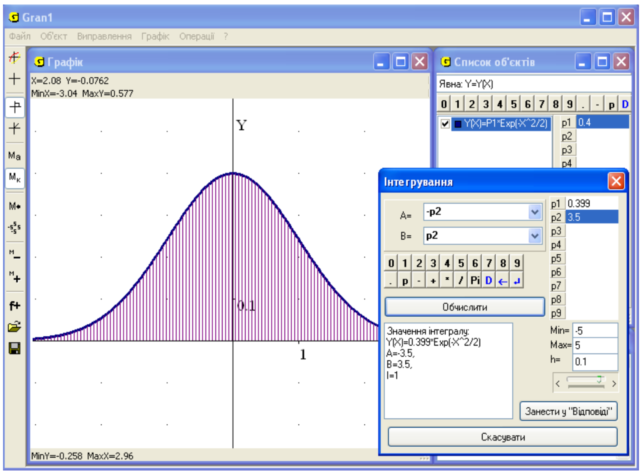


Рис. 25. До задачі 2.8

5. Легко бачити, що лише при $A > 0$ виконується перша властивість щільності розподілу ймовірностей. При цьому $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{+\infty} Ae^{-Ax}dx = = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-e^{-Ax}\right)\Big|_0^b = 1$. Тобто, при будь-якому $A > 0$ функція $f(x)$ є щільністю розподілу ймовірностей.

Разом з тим, розв'язання цієї задачі за допомогою ППЗ GRAN1 може привести до неправильних висновків.

Наприклад, ввівши функцію *Y(X)=P1*Exp(-P1*X)* на проміжку *A*=0 і *B*=10000 з кількістю точок побудови 1000 (це максимальне значення) і обчисливши інтеграл від цієї функції у межах, наприклад, від 0 до 1000, при різних значеннях параметра *P1* одержуємо різні значення інтеграла: I=1 при *P1*=0,45; I=1,002 при *P1*=0,98; I=1,025 при *P1*=2; I=2,608 при *P1*=10; I=14,58 при *P1*=56 (див. вікна „*Інтегрування*" і „*Відповіді*" на рис. 18). Тобто, значення інтеграла зростає при збільшенні параметра *P1*. Можна запропонувати сильнішим студентам пояснити такі розходження і знайти шляхи їх усунення. Причиною таких розходжень є спосіб обчислення визначених інтегралів у даній програмі. У GRAN1 для цього використовується формула Сімпсона. При обчисленні невласних інтегралів на нескінченних проміжках доводиться вводити великий відрізок інтегрування, а максимальна кількість точок розбиття – 1000. Звідси і значні похибки. Шляхом їх усунення у даній задачі може бути задання даної функції на двох відрізках, наприклад, на [0; 10] і [10; 10000] та обчислення потрібного інтеграла, фактично, як суми двох інтегралів на двох заданих проміжках. Цю суму можна знайти автоматично за допомогою GRAN1 (рис. 19), виділивши у списку об'єктів дві функції з одним і тим же аналітичним виразом, але заданих на різних проміжках, та обчисливши інтеграл на відрізку [0; 10000]. Або самостійно, обчисливши за допомогою GRAN1 інтеграл від даної функції окремо на обох відрізках (рис. 20, 21). З рис. 20, 21 видно, що при різних значеннях параметра *P1* сума двох інтегралів практично дорівнює 1. Ця задача ще раз підкреслює той факт, що використання ППЗ має йти паралельно з теоретичним обґрунтуванням одержаних за їх допомогою результатів.

6. Оскільки $e^x > 0 \ \forall x \in R$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, то дана функція $f(x)$ не є щільністю розподілу ймовірностей при будь-якому значенні параметра A (Рис. 22).

7, 8. Використання програми GRAN1 допомагає зробити висновок, що дані функції є щільностями розподілу ймовірностей, коли, відповідно, $A = \pm 1$ (у задачі 7 – рис. 23) та $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}399$ (у задачі 8 – рис. 24). Завдяки можливості використання у програмі GRAN1 динамічних параметрів, зокрема і в межах інтегрування, з рис. 25 видно, що інтеграл від функції 8) вже в межах [-3,5; 3,5] майже дорівнює 1.

Зауважимо, що задачі 2.1-2.8 можна розв'язати і без використання ППЗ. Проте досвід показує, що це знижує мотивацію і ефективність роботи студентів.

Наведемо кілька статистичних задач та їх розв'язань за допомогою ППЗ GRAN1.

Задача 3. Для спостережених 50 значень дискретної випадкової величини – кількості відмінників у навмання вибраних для перевірки старших класах м. Києва – побудувати дискретний статистичний ряд, полігон відносних частот та графік функції розподілу статистичних ймовірностей. Знайти вибіркове середнє, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

3	2	3	1	2	4	3	2	4	4
6	3	6	3	7	3	3	0	4	5
2	1	6	2	4	3	5	1	2	1
3	6	5	3	0	2	2	1	8	2
4	2	1	3	1	4	4	2	2	2

Розв'язання. У вікні „*Дані статистичної вибірки*" вибираємо *Дискретний розподіл*, *Тип даних – Варіанти*, *Тип графіка – Полігон*, а потім *Функція* $F^*(x)$). Дані можна вводити безпосередньо у цьому вікні чи взяти з раніше створеного файлу.

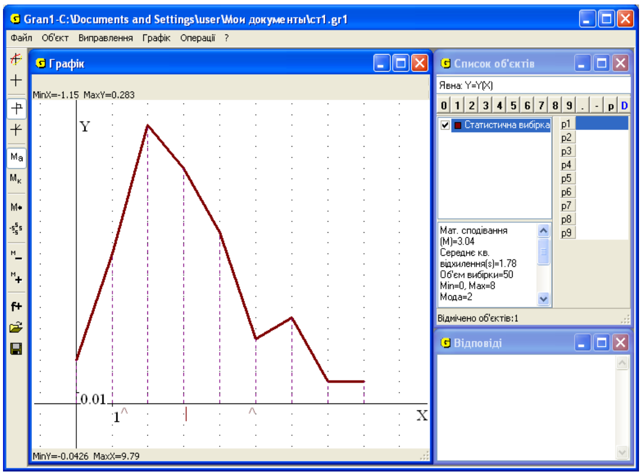


Рис. 26

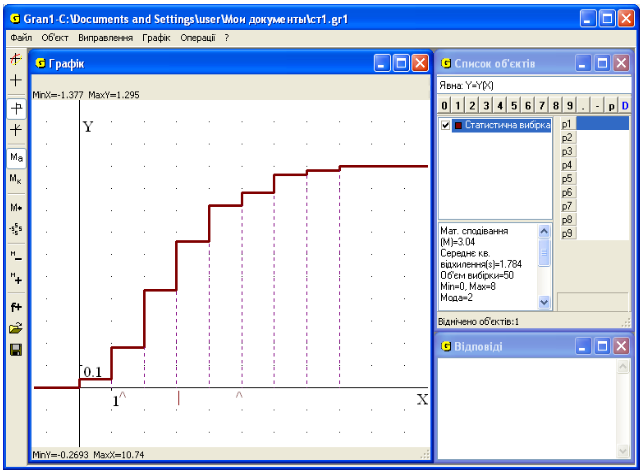
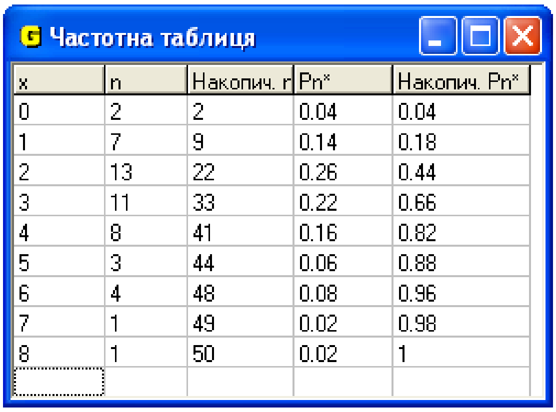


Рис. 27

Після натиснення кнопки „*Далі→*” та побудови вибраного графіка у вікні „*Графік*” одержуємо полігон відносних частот чи графік функції розподілу статистичних ймовірностей (рис. 26, 27), а у нижній частині вікна „*Список об'єктів*” – потрібні нам числові значення: *Мат. сподівання(M)=3,04* (це і є вибіркове середнє); *Середнє кв. відхилення(s)=1,784* (вибіркове), а дисперсія, як відомо, це s^2, тому $s^2 = 3{,}183$. Для побудови дискретного статистичного ряду скористаємося послугою меню *Операції/Статистика/Частотна таблиця*, результат подано на рис. 28: два перші стовпчики і утворюють потрібну частотну таблицю.

Відповідь. $\bar{x}_B = 3{,}04$; $s^2 = 3{,}18$; $s = 1{,}78$.

Зауважимо, що для будь-якого вигляду графіка статистичної вибірки на осі *Ox* позначкою „|” зображується вибіркове середнє, а позначкою „^” – точки, віддалені в обидві сторони від вибіркового середнього на відстань, що дорівнює вибірковому середньому квадратичному відхиленню.


Частотна таблиця

x	n	Накопич. n	Pn*	Накопич. Pn*
0	2	2	0.04	0.04
1	7	9	0.14	0.18
2	13	22	0.26	0.44
3	11	33	0.22	0.66
4	8	41	0.16	0.82
5	3	44	0.06	0.88
6	4	48	0.08	0.96
7	1	49	0.02	0.98
8	1	50	0.02	1

Рис. 28

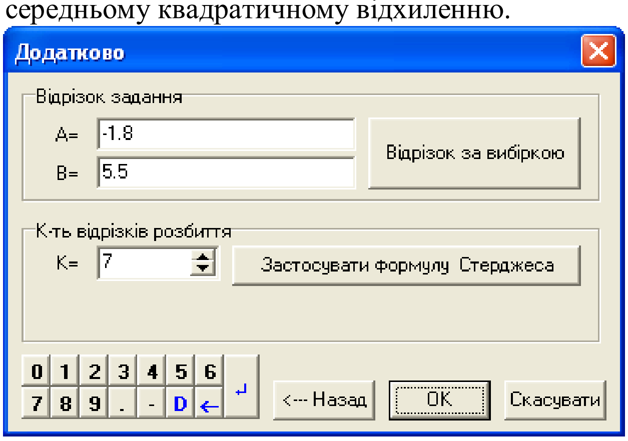


Рис. 29

Задача 4. Відомий приріст ваги 50 студентів після різдвяних канікул (у кілограмах):

-1,0	-0,4	-0,4	2,1	5,2	5,5	-1,4	1,4	1,8	-0,2
-0,5	3,8	1,3	2,5	3,2	-0,5	4,3	-0,1	1,4	3,8
3,7	0,6	3,9	0,4	0,3	0,1	0,0	5,0	2,6	5,3
2,3	2,4	-1,5	3,8	-0,7	0,9	5,2	5,5	1,4	0,8
1,1	-0,2	-0,6	1,3	1,5	3,9	-1,8	3,5	3,1	-1,5

Побудувати інтервальний статистичний ряд, гістограму та графік функції розподілу статистичних ймовірностей. Знайти вибіркове середнє, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання. Тут уже розподіл є неперервним, а побудувати потрібно і гістограму, і функцію розподілу статистичних ймовірностей. Крім того, для неперервного розподілу після натиснення кнопки „*Далі→*” з'являється вікно „*Додатково*” (рис. 29), де треба вказати відрізок задання та кількість відрізків розбиття.

Гістограму та функцію $F^*(x)$ одержимо у вікні „*Графік*”, а числові характеристики – у вікні „*Список об'єктів*” (рис. 30, 31).

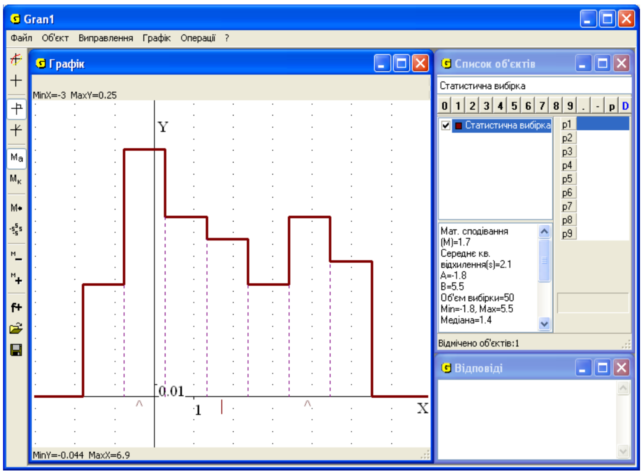


Рис. 30

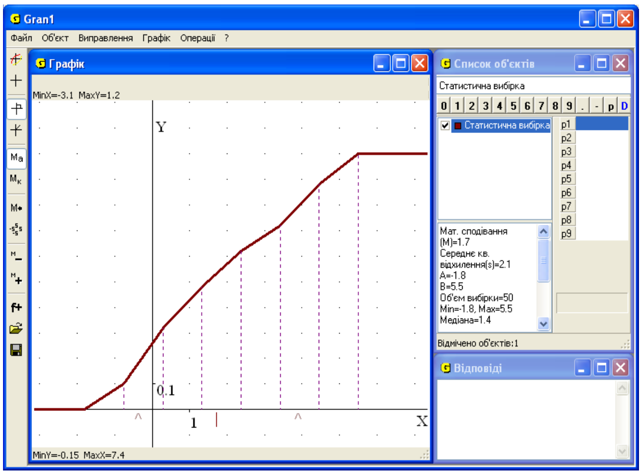


Рис. 31

Відповідь. $\bar{x}_B = 1{,}7$; $s^2 = 4{,}4$; $s = 2{,}1$. (Округлені до двох значущих цифр, як і вихідні дані задачі).

Однією із задач математичної статистики є перевірка різних статистичних гіпотез.

При розв'язуванні таких задач без використання комп'ютера потрібно обчислити всі вибіркові характеристики, потім експериментальне значення критерію, за таблицею знайти критичну точку розподілу (теоретичне значення критерію), порівняти ці значення та зробити висновок. Тобто розв'язування вимагає досить великої кількості доволі громіздких обчислень за певними формулами, часто навіть неусвідомлюваних студентами. Корисність такої роботи близька до нуля.

У програмі GRAN1 передбачена перевірка за критерієм Пірсона гіпотез про узгодженість (несуперечність) гіпотетичного дискретного розподілу ймовірностей (задається рядом розподілу) із статистичними даними та про гіпотетичну щільність неперервного розподілу ймовірностей. Для цього використовується послуга „*Операції/Статистика/Критерій Пірсона...*”. При зверненні до даної послуги у вікні „*Список об'єктів*” повинні бути відмічені міткою ☑ позначення залежності, заданої явно у вигляді $y = f(x)$, і вибірки, чи позначення двох вибірок, що співставляються. Область задання функції $f(x)$ повинна охоплювати область, якій належать варіанти вибірки.

Задача 5. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості 0,95, перевірити, чи підтверджується гіпотеза про нормальний розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X з емпіричним розподілом вибірки об'єму n=200 (x_i – середини інтервалів):

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

Розв'язання. Спочатку побудуємо гістограму розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) для даної вибірки, ввівши відрізок задання [0,2; 2,4] (рис. 32). Для порівняння із нормальним розподілом ймовірностей у програмі GRAN1 є спеціальна послуга „*Операції/Статистика/ Щільність нормального розподілу за вибіркою*”, яка додає до списку об'єктів цю функцію з параметрами M (вибіркове середнє) і s (вибіркове виправлене середнє квадратичне відхилення), а у вікні *„Графік”* поряд з гістограмою з'являється графік щільності цього розподілу (рис. 33). Вже на цьому кроці, порівнюючи графіки, студенти можуть висловити припущення про підтвердження чи заперечення гіпотези про нормальний розподіл ймовірностей за спостереженими даними.

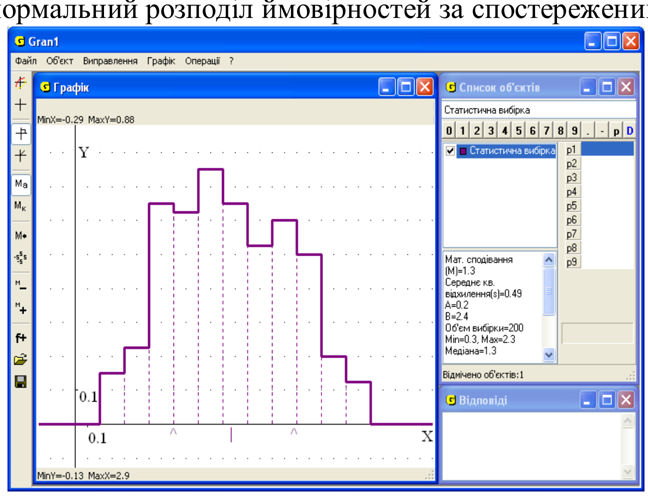


Рис. 32

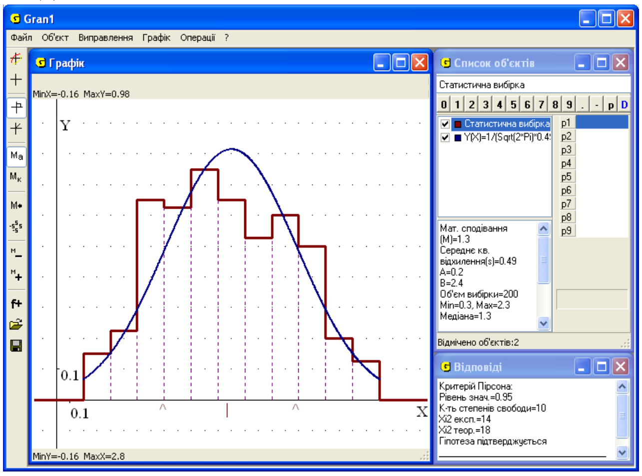


Рис. 33

Для більш точної перевірки гіпотези досить скористатися послугою „*Операції / Статистика / Критерій Пірсона...*”. У вікні „*Відповіді*” отримуємо результат – *Гіпотеза підтверджується* (рис. 33).

Відповідь. Гіпотеза про нормальний розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини X за результатами даної вибірки підтверджується.

Задача 6. Протягом 10 годин реєстрували прибуття машин до автозаправки і одержали такий емпіричний розподіл:

x_{i-1}-x_i	8:9	9:10	10:11	11:12	12:13	13:14	14:15	15:16	16:17	17:18
n_i	12	40	22	16	28	6	11	33	18	14

При рівні значущості 0,99 перевірити гіпотезу про рівномірний розподіл ймовірностей часу прибуття машин.

Розв'язання. Побудуємо гістограму даного розподілу, а також введемо явно задану функцію *Y(X)*=0,1, яка є щільністю рівномірного розподілу ймовірностей на відрізку [8; 18] (за його межами дорівнює нулю) і використаємо послугу „*Операції/Статистика/Критерій Пірсона...*”. Результат – *Гіпотеза не підтверджується* (рис. 34).

Відповідь. Гіпотеза про рівномірний розподіл ймовірностей не підтверджується.

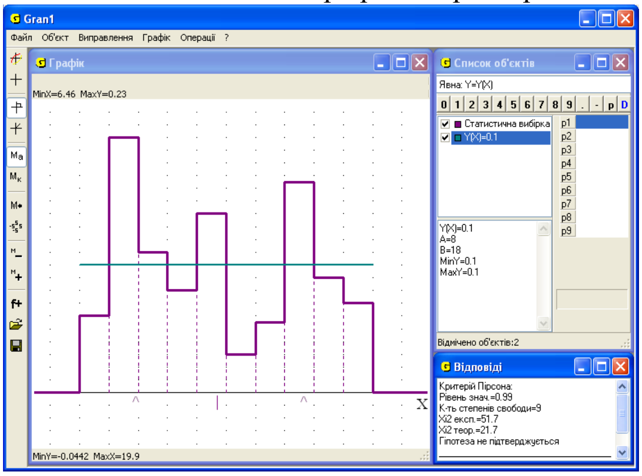


Рис. 34

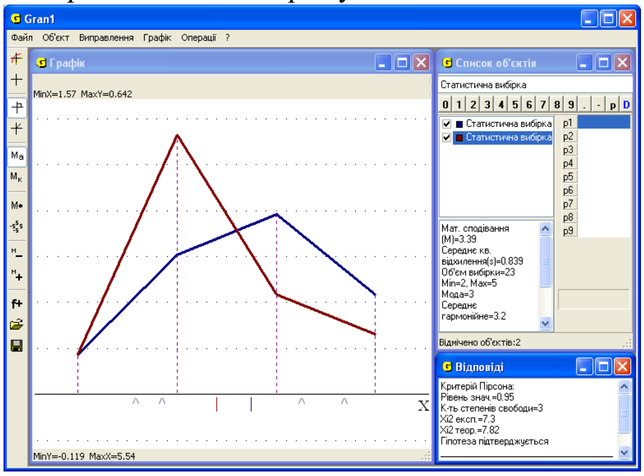


Рис. 35

Задача 7. Чи можна сказати, що результати контрольної роботи двох груп практично не відрізняються, якщо вони такі:

	„5”	„4”	„3”	„2”
I група	5	9	7	2
II група	3	5	13	2

Розв'язання. Створюємо дві дискретні статистичні вибірки та перевіряємо за критерієм Пірсона гіпотезу про їх статистичну однаковість при рівні значущості, наприклад, 0,95. Результат – *Гіпотеза підтверджується* (рис. 35).

Відповідь. Можна сказати, що результати контрольної роботи двох груп практично не відрізняються.

Дані останньої задачі відповідають результатам контрольної роботи конкретних груп.

4. Висновки.

1. Зауважимо, що студенти з підвищеним інтересом розв'язують задачі „про себе”. Тому, по можливості, доцільно включати такі задачі при вивченні різних тем курсу.

2. Порівнюючи роботу студентів двох спеціальностей: „Математика та основи інформатики” і „Математика та основи економіки”, можна сказати, що перші швидше (бо краще знайомі з програмами з курсу інформатики), а другі з більшою зацікавленістю виконують завдання з теорії ймовірностей та математичної статистики з використанням ППЗ.

3. Не слід ставити за мету використання інформаційних технологій на кожному занятті. Але там, де вони допомагають унаочнити подання матеріалу, заощадити час на виконання різноманітних обчислень та побудов, їх використання є доцільним, адже воно сприяє організації ефективної навчально-пізнавальної діяльності студентів, дозволяє реалізувати індивідуальний підхід до кожного студента.

4. Доцільно формувати у майбутніх учителів здатність до обґрунтування висновків щодо результатів застосування ППЗ.

ЛІТЕРАТУРА

1. Національна доктрина розвитку освіти // Освіта України. – 2002. – № 33 (23 квітня). – С. 4-6.
2. Жалдак М.І., Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф. Математика з комп'ютером: Посібник для вчителя. – Вид. 2-е. – К.: РННЦ „ДІНІТ”, 2007. – 254 с.
3. Кравцова Л.В., Маслянчук С.М. Можливості табличного процесора Microsoft Excel для розв'язування задач теорії ймовірностей і математичної статистики // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2003. – № 5. – С. 35-38.
4. Надточій С.Л. Використання ППЗ GRAN1 при вивченні теми „Нормальний розподіл ймовірностей” майбутніми учителями математики // Вісник Черкаського національного університету. Серія: Педагогічні науки. – Вип. 111. – Черкаси, 2007. – С. 86-95.
5. Решение математических задач средствами Excel: Практикум / В.Я. Гельман. – СПб.: Питер, 2003. – 240 с.
6. Жалдак М.І., Михалін Г.О., Кузьміна Н.М. Збірник задач з теорії ймовірностей і математичної статистики: Навч. посібник. – К., 2007. – 715 с.
7. Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова думка, 1992. – 208 с.