1. Побудова у середовищі пакета DG “Експертних систем”, які дозволяють наближено “розв’язувати многокутники” – визначати якомога більше їх параметрів для кожної ознаки рівності многокутників даної розмірності (п’ятикутників, шестикутників, і т.д.)

ЛІТЕРАТУРА

1. E.Pehkonnen. Use of open-ended problems in mathematical classroom. – Helsinki University (Finland), Research Report 176, 1997. – 130 p.

2. Д.Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения. М:.«Наука», 1975.– 464 с.

3. Г.Вейль, Математическое мышление. М:., «Наука». 1989. – 400 стр.

Михалін Г.О.
МАУП, м. Київ

Використання алгоритмів у процесі навчання математичного аналізу

1. Під *інформаційною культурою* вчителя математики розуміють сукупність його знань та вмінь, орієнтованих на інформаційне забезпечення діяльності, пов’язаної із створенням, збиранням, зберіганням, опрацюванням, поданням і використанням відомостей, що забезпечує цілісне бачення світу, його моделювання, передбачення результатів рішень, які приймає людина [1, с. 237-238].

До найважливіших компонентів основ інформаційної культури вчителя математики відносять [2]:

- розуміння сутності інформації та інформаційних процесів, їх ролі в процесі пізнання навколишньої дійсності та створюючої діяльності людини, в управлінні технічними і соціальними процесами, в забезпеченні зв’язку живого з оточуючим середовищем;
- розуміння проблем подання, оцінки і вимірювання інформації, її сприймання і розуміння, сутності формалізації суджень, зв’язку між змістом і формою, ролі формалізації змістовних суджень та інформаційного моделювання в сучасних інформаційних технологіях;
- розуміння сутності неформалізовних, творчих компонент мислення: постановка проблеми і добір потрібних операцій, що приводять до її розв’язування;
- розуміння сутності штучного інтелекту, моделей знань, інтелектуально-пошукових систем;
- розуміння того, що автоматизовані інформаційні системи необхідні (достатні) для розв’язування далеко не всіх задач;
- розуміння сутності математичного моделювання,

адекватності моделі досліджуваному явищу, коректності постановки задачі, стійкості методу розв’язування та відповідного алгоритму, впливу похибок;

- розуміння сутності поняття алгоритму, уявлення про програмування і мови програмування;

- володіння основами алгоритмізації, програмування, арифметичними та логічними основами ЕОМ, елементами схемотехніки ЕОМ;

- володіння основами робототехніки, гнучких автоматизованих виробництв, автоматизації виробництва;

- володіння знаряддєвими застосуваннями ЕОМ, систем опрацювання текстової, числової і графічної інформації, баз даних і знань, предметно-орієнтованих прикладних систем;

- уміння добирати і формулювати мету, здійснювати постановку задач, висувати гіпотези, будувати інформаційні моделі досліджуваних процесів і явищ, аналізувати їх за допомогою інформаційно-комунікаційних технологій та інтерпретувати отримані результати, систематизувати, осмислювати і формулювати висновки, узагальнювати спостереження, передбачати наслідки прийнятих рішень і вміти їх оцінювати;

- уміння розробляти програму спостереження, досліду, експерименту; добирати послідовність операцій і дій в діяльності;

- уміння використовувати інформаційно-комунікаційні технології для підготовки супроводу, аналізу, коригування навчального процесу, управління навчальним процесом і навчальним закладом;

- уміння добирати раціональні методи і засоби навчання, враховуючи індивідуальні особливості учнів, їх нахили і здібності;

- уміння побудувати навчальний процес згідно із загальним методологічним принципом: відомості, що циркулюють у навчальному процесі, повинні бути ефективними на кожному його етапі, у кожний момент навчальної діяльності (інакше виникає небезпека перетворення інформації на шум);

- уміння поєднувати традиційні методичні системи навчання із новими інформаційно-комунікаційними технологіями.

Відмічені компоненти основ інформаційної культури вчителя математики тісно пов’язані з іншими компонентами його професійної культури.

Проілюструємо можливості формування у процесі навчання математичного аналізу компонентів інформаційної культури вчителя математики, пов’язаних з поняттям алгоритму і основами алгоритмізації [3].

2. Учитель математики повинен розуміти, що успіх будь-якого процесу навчання у великій мірі залежить від того, наскільки добре учні опанували вже створені алгоритми розв’язування тих чи інших класів задач. Переважна більшість учнів опановує лише найнеобхідніші для них алгоритми, і цього їм достатньо для повсякденного життя. Діяльність значно меншої кількості людей вимагає від них не тільки знання великої кількості стандартних алгоритмів, а й уміння створювати нові алгоритми і навчати інших користуватися цими алгоритмами. До таких людей відносяться і учителі математики. Саме тому в процесі навчання фахових математичних дисциплін треба не тільки знайомити майбутніх учителів математики з найважливішими алгоритмами розв'язування задач з відповідної дисципліни, а й формувати в них вміння складати і використовувати алгоритми та навчати цього своїх учнів.

Уже з перших днів навчання математичного аналізу майбутніх учителів математики доцільно ознайомити їх з поняттям *алгоритму* (або загального методу) розв'язування певного класу задач, як чітко виділеного скінченного впорядкованого набору дій, послідовне виконання яких через скінченне число кроків приводить до розв'язування будь-якої задачі з даного класу. Разом з тим бажано формувати переконання, що явне формулювання алгоритму розв'язування певного класу задач сприяє успішному розв'язуванню таких задач більшістю учнів. Тому однією з основних математичних задач була, є і буде задача створення ефективних алгоритмів розв'язування тих чи інших класів задач.

Курс математичного аналізу містить достатню кількість задач, за допомогою яких можна формувати поняття алгоритму і уміння створювати алгоритми.

Алгоритми, які можна (і треба) сформулювати у процесі навчання математичного аналізу, як правило, є досить простими і ефективними, а тому і корисними для всіх, хто вивчає курс математичного аналізу.

Систематична робота у таких напрямках як мінімум є пропедевтикою вивчення майбутніми вчителями основ алгоритмізації в курсі інформатики. Разом з цим така практика формує у вчителя математики переконання, що ефективне опанування елементами інформаційної культури їхніми майбутніми учнями можливе лише тоді, коли на практиці систематично підтверджується доцільність використання цих елементів у різних галузях діяльності людини. Для обдарованих студентів така системна робота сприяє формуванню стійких внутрішніх мотивів до науково-дослідної діяльності у галузі математичних чи методичних наук.

3. Деякі алгоритми, пов'язані з матеріалом вступу до аналізу. Опановуючи вступ до аналізу, майбутні вчителі математики можуть під керівництвом викладача створити багато корисних алгоритмів, зокрема такі:

- доведення рівності двох множин;
- перевірки взаємної однозначності даної відповідності;
- порівняння двох множин за кількістю елементів;
- доведення, що дане число є супремумом (інфімумом) даної множини;
- знаходження кореня n-го степеня з даного комплексного

числа;

- методу математичної індукції;
- зображення раціонального числа у вигляді нескінченного *r*-кового дробу;
- доведення мовою “$\varepsilon - n_0$” рівності $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$;
- доведення мовою “$\varepsilon - \delta$” рівності $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c$;
- розв’язування нерівності методом інтервалів;
- обчислення $\exp z$ із заданою точністю;
- дослідження збіжності даного числового ряду;
- відшукання області збіжності степеневого ряду з дійсними членами;
- відшукання асимптот графіка дійсної функції.

Наведемо словесне формулювання деяких з цих алгоритмів.

3.1. Алгоритм відшукання кореня n-го степеня з комплексного числа $z := x + iy$.

1. Задати комплексне число $z = x + iy$ та степінь n кореня.
2. Обчислити модуль комплексного числа $z := x + iy$: $|z| = \sqrt[+]{x^2 + y^2}$.
3. Зобразити z на комплексній площині і визначити $\arg z$.
4. Знайти арифметичний корінь: $\sqrt[n]{|z|}_+$.
5. Обчислити аргументи $\varphi_k = \dfrac{\arg z + 2\pi k}{n}$ для всіх $k \in \overline{0, n-1}$.
6. Знайти всі значення $\sqrt[n]{z} = z_k$, $k \in \overline{0, n-1}$, за формулою
$$z_k = \sqrt[n]{|z|}_+ (\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k).$$
7. Зобразити точки z_k на комплексній площині.
8. *Якщо* точки z_k утворюють правильний многокутник, *то* зробити висновок “Точки z_k, $k \in \overline{0, n-1}$, є значеннями $\sqrt[n]{z}$”.
9. *Інакше* зробити висновок: “Значення $\sqrt[n]{z}$ знайдено неправильно”.
10. Кінець.

3.2. Алгоритм доведення “мовою $\varepsilon - n_0$***” рівності*** $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$.

1. Задати послідовність (z_n) і можливу границю c.
2. Вважати, що $\varepsilon > 0$ – довільне фіксоване число.
3. Визначити, чи існує $n_0(\varepsilon)$ таке, що всі натуральні числа

$n > n_0(\varepsilon)$ є розв'язками нерівності $|z_n - c| < \varepsilon$. /* При цьому іноді корисно застосувати підсилення нерівності */.

4. *Якщо* такого числа $n_0(\varepsilon)$ для деякого $\varepsilon > 0$ не існує,

то зробити висновок: "Число c не є границею послідовності (z_n)".

5. *Інакше* зробити висновок: "$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon): \quad |z_n - c| < \varepsilon$ $\forall n > n_0(\varepsilon)$, і тому за означенням границі послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$".

6. Кінець.

3.3. Алгоритм доведення "мовою $\varepsilon - \delta$" рівності $\lim\limits_{E \ni z \to z_0} f(z) = c$, де $z_0 \neq \infty$, $c \neq \infty$.

1. Задати функцію f, точку $z_0 \neq \infty$ і точку $c \neq \infty$, для яких, можливо, правильна рівність $\lim\limits_{E \ni z \to z_0} f(z) = c$.

2. Вважати, що $\varepsilon > 0$ – довільне фіксоване число.

3. Визначити, чи існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що всі числа $z \in E$: $0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ є розв'язками нерівності $|f(z) - c| < \varepsilon$. /* При цьому іноді корисно застосувати підсилення нерівності */.

4. *Якщо* такого числа $\delta(\varepsilon)$ не існує для деякого $\varepsilon > 0$,

то зробити висновок: "Число c не є границею функції f у точці z_0".

5. *Інакше* зробити висновок: "$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$: $|f(z) - c| < \varepsilon$, коли $z \in E$ і $0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon)$, а тому за означенням границі функції в точці $\lim\limits_{E \ni z \to z_0} f(z) = c$".

6. Кінець.

3.4. Алгоритм застосування методу математичної індукції.

1^*. Знайти ціле число n_0, для якого доводжуване твердження T_{n_0} є правильним, а також є правильними твердження T_{n_0+1}, T_{n_0+2}, T_{n_0+3}.

2. Якщо таке число n_0 не знайдено, то зробити висновок: "Не можна напевно стверджувати, що твердження T_n правильне $\forall n \geq n_0$".

Інакше:

3^*. Припустити правильність твердження T_n для $n = m \geq n_0$.

4^*. Перевірити правильність твердження T_n для $n = m + 1$ за умов припущення і правильності твердження T_{n_0}.

5^*. *Якщо* правильність твердження T_{m+1} випливає з правильності тверджень T_m і T_{n_0},

то зробити висновок: "За принципом математичної індукції твердження T_n правильне $\forall n \geq n_0$".

6. *Інакше* зробити висновок: "Методом математичної індукції твердження T_n довести не можна".

7. Кінець.

На прикладі цього алгоритму доцільно продемонструвати відмінність між алгоритмом і відповідним правилом-орієнтиром, яке найчастіше за формою є простішим від алгоритму, а за змістом не є визначеним, оскільки не дає однозначної відповіді, що робити у будь-якій можливій ситуації. Наприклад, правило-орієнтир методу математичної індукції не вказує, що робити, коли твердження T_{m+1} не випливає з твердження T_m. Разом з тим для розв'язування багатьох задач достатньо правила-орієнтира, яке не таке громіздке, як алгоритм, і краще запам'ятовується учнями. Тому серед пунктів алгоритму можна виділити пункти, що складають відповідне правило-орієнтир. Для методу математичної індукції – це пункти 1^*, 3^*, 4^* і 5^*.

3.5. Алгоритм розв'язування нерівностей за методом інтервалів.

1. Рівносильними перетворюваннями (перенесення в ліву або праву частину) звести нерівність до вигляду $f(x) \geq 0$ ($f(x) > 0$) або $f(x) \leq 0$ ($f(x) < 0$).

2. Знайти область визначення функції f, що складається з її проміжків неперервності. Зобразити ці проміжки на числовій прямій.

3. Знайти корені рівняння $f(x) = 0$ і зобразити їх на числовій прямій точками "●", коли нерівність нестрога, і точками "○", коли нерівність строга.

4. Записати $D(f)$ як об'єднання скінченної кількості проміжків, на кожному з яких неперервна функція f зберігає знак (за теоремою Больцано – Коші).

5. За допомогою сигнальних точок (довільних фіксованих точок з відповідних проміжків) визначити знак $f(x)$ на кожному з даних проміжків, що утворюють $D(f)$.

6. Вибрати ті проміжки, на яких $f(x)$ має потрібний знак. Об'єднання цих проміжків є множиною розв'язків даної нерівності.

7. Кінець.

3.6. Алгоритм обчислення $\exp x$ *із заданою точністю* ε *за формулою* $\exp x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \Delta(x)$, *де* $|\Delta(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} \cdot \frac{H(x)}{n}$, $H(x) = \max\{1, |x|\}$, $|x| \leq n+1$.

1. Задати число x і точність ε.

2. Знайти $H = \max\{1, |x|\}$ і $n_0 = |x| - 1$.

3. Покласти $S := 1$, $n := 0$, $d := 1$, $\Delta := \varepsilon$.

4. *Поки* $n < n_0$, виконувати:

пц 5. Покласти $n := n + 1$.

6. Покласти $d := \frac{d \cdot x}{n}$; $S := S + d$.

кц

7. *Поки* $\Delta \ge \varepsilon$, виконувати:

пц 8. Покласти $\Delta := \frac{|d \cdot x| \cdot H}{n}$.

9. Покласти $n := n + 1$.

10. Покласти $d := \frac{d \cdot x}{n}$; $S := S + d$.

кц

11. Покласти $\exp x := S$ і зробити висновок: “Число S є значенням експоненти у точці x з точністю ε”.

12. Кінець.

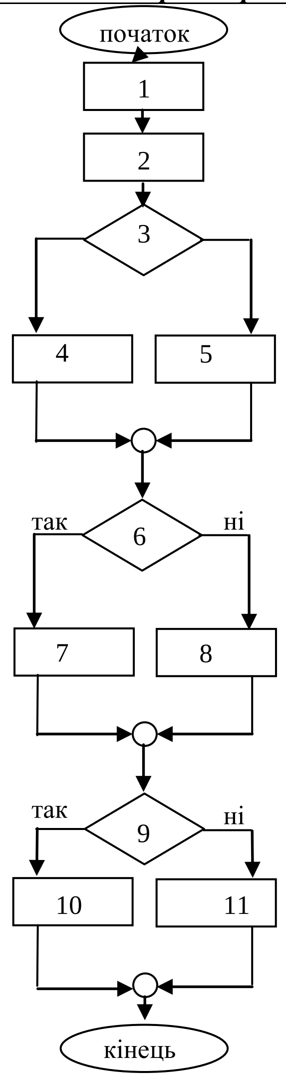
Сформульовані алгоритми можуть бути відправною точкою для самостійного створення майбутніми вчителями математики схожих алгоритмів, що стосуються відповідного матеріалу вступу до аналізу функцій багатьох змінних. Зокрема, це стосується алгоритмів доведення рівності $\lim\limits_{z \to z_0} z_n = c$ “мовою $\varepsilon - n_0$” у довільному метричному просторі та в конкретних метричних і нормованих просторах та алгоритмів доведення рівності $\lim\limits_{z \to z_0} f(x) = c$ для функцій, що визначені у довільному метричному просторі (M_1, ρ_1) та набувають значень у просторі (M_2, ρ_2), а також для випадку конкретних просторів (M_1, ρ_1) і (M_2, ρ_2).

4. Алгоритми розв’язування деяких задач диференціального числення. Навчаючи майбутніх учителів математики диференціального числення, доцільно прагнути до того, щоб вони самостійно або під керівництвом викладача створили алгоритми:

- перевірки диференційовності функції у точці;
- знаходження n-ої похідної функції;
- розвинення функції у ряд Тейлора;
- знаходження інтервалів монотонності функції;
- знаходження локальних екстремальних значень функції;
- знаходження глобальних екстремальних значень функції;
- знаходження проміжків опуклості функції;
- повного дослідження функції та побудови її графіка;
- знаходження коренів рівняння методами: графічним (з використанням ППЗ), вилки, хорд, дотичних і комбінованим.

Наведемо формулювання деяких з названих алгоритмів. Зауважимо, що крім способу словесного формування, проілюстрованого у пунктах 3.1 –3.6, доцільно якомога раніше ознайомити майбутніх учителів математики з поданням алгоритмів у вигляді графічних схем, а також з найзручнішим комбінованим способом, коли наводиться словесний опис набору дій, кожна з яких паралельно ілюструється частиною відповідної графічної схеми.

4.1. Алгоритм розвинення функції у ряд Тейлора.



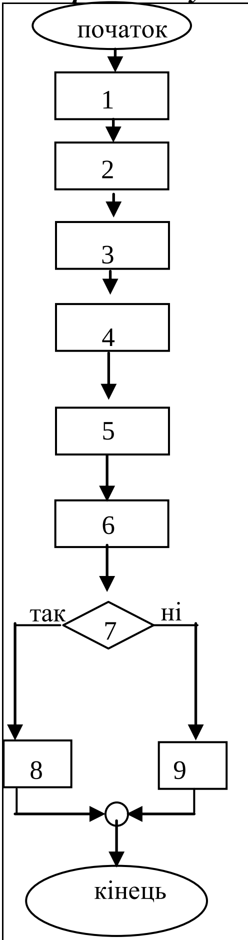
	Набір дій
1	Задати функцію f і точку $z_0 \in D^\circ(f)$. Покласти $R = 1$
2	Обчислити похідні $f^{(n)}(z_0)$, $n \in \mathbf{N}$
3	*Якщо* функція f є нескінченно диференційовною у точці z_0, *то* виконати пункт 4. *Інакше* виконати пункт 5
4	Скласти ряд Тейлора $$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$ і знайти його радіус збіжності R та інтервал збіжності
5	Покласти $R = 0$
6	*Якщо* $R > 0$, *то* виконати пункт 7. *Інакше* виконати пункт 8
7	Знайти залишковий член $R_n(f, z_0)$ і визначити множину E тих точок інтервалу (круга) збіжності ряду Тейлора, де $R_n(f, z_0) \to 0$ $(n \to \infty)$
8	Покласти $E = \varnothing$
9	*Якщо* $E \neq \varnothing$, *то* виконати пункт 10. *Інакше* виконати пункт 11
10	Записати ряд Тейлора функції f за степенями $(z - z_0)$: $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \ z \in E$$
11	Зробити висновок, що функція f не розвивається у ряд Тейлора за степенями $(z - z_0)$
12	Закінчити роботу

Порівнюючи цей комбінований спосіб подання алгоритму із чисто словесним та у вигляді графічної схеми, бачимо, що комбінований спосіб є найзручнішим. Тому надалі будемо використовувати тільки цей спосіб.

5. Алгоритми розв'язування деяких задач інтегрального числення. У процесі навчання інтегрального числення доцільно, щоб майбутні вчителі математики самостійно (під керівництвом викладача) створили такі алгоритми: розкладання раціональної функції на елементарні дроби; інтегрування раціональної функції за допомогою підстановок Ейлера; інтегрування диференціального бінома; інтегрування деяких трансцендентних функцій; обчислення R-інтеграла як границі інтегральної суми; наближеного обчислення R-інтеграла за методом прямокутників, трапецій, Сімпсона; обчислення подвійного і потрійного інтегралів за допомогою повторних; створення ймовірнісного простору тощо.

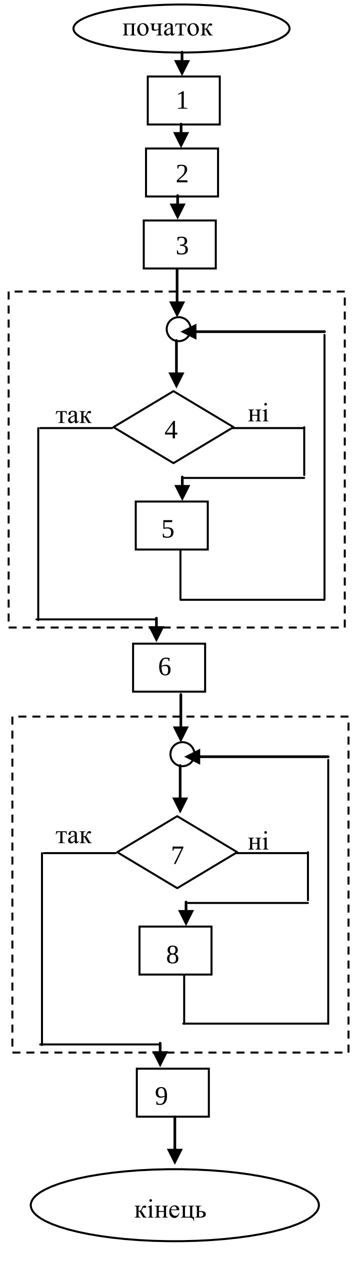
Наведемо формулювання і графічні схеми деяких з цих алгоритмів.

5.1. Алгоритм обчислення R-інтеграла як границі інтегральної суми.



	Набір дій
1	Задати підінтегральну функцію f і відрізок інтегрування $[a;b]$
2	Вибрати (T)-розбиття відрізка $[a;b]$ на відрізки $[x_k;x_{k+1}]$, $k\in\overline{0,n-1}$, $n\in\boldsymbol{N}$
3	Вибрати проміжні точки $x_k^*\in[x_k;x_{k+1}]$, $k\in\overline{0,n-1}$
4	Обчислити $f(x_k^*)$ і $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$, $k\in\overline{0,n-1}$
5	Обчислити інтегральну суму $S(T)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(x_k)\Delta x_k$
6	Визначити дрібність (T)-розбиття: $\lambda(T)=\max\limits_{0\le k\le n-1}\Delta x_k$
7	*Якщо* границя $\lim\limits_{\lambda(T)\to0}S(T)=I(f)$ не існує або залежить від способу розбиття (T) чи від способу вибору проміжних точок x_k^*,
8	*то* зробити висновок: функція f не є R-інтегровною на $[a;b]$
9	*Інакше* зробити висновок: функція f є R-інтегровною на $[a;b]$ і $\int\limits_a^b f\,dx=I(f)$
10	Закінчити роботу

5.2. Алгоритм створення ймовірнісного простору для даного стохастичного експерименту



	Набір дій
1	Задати стохастичний експеримент
2	Визначити множину Ω усіх можливих наслідків випробувань, пов'язаних з даним стохастичним експериментом
3	Визначити сукупність S подій $A \subset \Omega$, пов'язаних з даним стохастичним експериментом
4	*Поки* S не є σ-алгеброю, виконувати пункт 5
5	Змінювати сукупність S шляхом введення нових подій $A \subset \Omega$ або шляхом вилучення з S деяких підмножин
6	Задати ймовірнісну міру (ймовірність) $P(A)$ подій $A \in S$
7	Поки ймовірнісна міра $P(A)$ не узгоджена з простором S подій, виконувати пункт 8
8	Узгодити $P(A)$ з S шляхом розширення чи звуження S або довизначення $P(A)$ на деяких подіях $A \in S$ так, щоб S залишилася σ-алгеброю, а $P(A)$ – ймовірнісною мірою на S
9	Зробити висновок: "Ймовірнісний простір (Ω, S, P) побудовано"
10	Закінчити роботу

Зауважимо, що створення наведених алгоритмів доцільно здійснювати на практичних заняттях і створювати їх повинні, в основному, самі студенти – майбутні вчителі – під керівництвом викладача. Процес створення алгоритму, як і процес розв'язування кожної математичної задачі поділяють на етапи:

- вивчення і аналіз тексту типової (для створюваного алгоритму) задачі;
- пошук способу розв'язування задачі;
- реалізація знайденого способу – розробка відповідного алгоритму;
- критичний аналіз створеного алгоритму та його корекція.

Ще раз підкреслимо, що систематична робота стосовно створення алгоритмів розв'язування певних класів задач не тільки покращує засвоєння і застосування відповідного матеріалу, а й сприяє розвитку логічного мислення майбутніх вчителів математики, формує у них вміння аналізувати значно складніші задачі, які можна розв'язати лише за допомогою сучасних комп'ютерів, а тому таке розв'язування передбачає створення досить складних алгоритмів. Здатність до такого роду діяльності майбутніх вчителів математики підтвердила багаторічна співпраця автора даної роботи з Науково-дослідним інститутом зв'язку України, в якій брали участь і значна кількість студентів НПУ імені М. П. Драгоманова і за результатами своєї праці підготували і успішно захистили курсові та дипломні роботи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Основи нових інформаційних технологій навчання / Авт. колектив Ю. І. Машбиць, О. О. Гокунь, М. І. Жалдак та ін. / Інститут психології імені Г.С. Костюка АПН України. – К.: ІЗМН, 1997. – 264 с.

2. Жалдак М. І. Педагогічний потенціал інформатизації навчального процесу // Наукові записки Тернопільського державного пед. університету імені В. Гнатюка. Серія: Педагогіка. – 2002. – № 6. – С. 143 – 154.

3. Михалін Г. О. Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу. – К.: ДІНІТ, 2003. – 320 с.