М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, О.В. Стогній
НПУ імені М.П.Драгоманова

Про зв'язок основних понять шкільних курсів стохастики та геометрії

Після створення А.М. Колмогоровим аксіоматичної теорії ймовірностей [1] ця наукова теорія стала суто математичною, позбулася елементів суб'єктивізму і розпливчатості та досягла стану остаточно обґрунтованої [2], завдяки чому виникла реальна можливість вивчення елементів цієї теорії не тільки студентами вищих закладів освіти, а й учнями середньої школи. Нині елементи стохастики є однією з важливих змістових ліній шкільного курсу математики [3], [4], [5]. Тому досить актуальним і доцільним стає розкриття зв'язків основних стохастичних понять з іншими поняттями шкільного курсу математики.

Зв'язки між поняттями «простір елементарних подій», «множина елементів», «сукупність точок». В теорії ймовірностей досліджуються специфічні математичні моделі оточуючого світу, так звані *ймовірнісні моделі* [6]. Перший крок побудови такої моделі пов'язаний з конкретизацією певного спостереження за реальним явищем і фіксацією цілком конкретних результатів такого спостереження. Шляхом певних умовиводів (аналіз, синтез, порівняння, узагальнення тощо) приходять до висновку, що спостережуване реальне явище доцільно пов'язати з певною множиною (сукупністю) Ω можливих наслідків (результатів) спостереження. Саме спостереження часто називають *випадковим* (або *стохастичним*) *експериментом*, його результати – *елементарними подіями* (або можливими наслідками випробувань), а сукупність усіх таких результатів (можливих наслідків випробувань) – *простором елементарних подій* [6]. У процесі досліджень цей простір Ω може неодноразово уточнюватися. Наслідок кожного *випробування* (конкретного проведення випадкового експерименту) передбачити, взагалі кажучи, неможливо. Цей наслідок можна тлумачити як результат вибору навмання (незалежно від спостерігача) із множини Ω одного єдиного елемента $E \in \Omega$.

Оскільки спостерігач (експериментатор) сам фіксує результати спостережень за реальним явищем, то він позначає ці результати так, як йому зручно для подальшого дослідження. Майже завжди ці результати можна позначати як точки координатної прямої (одновимірного простору), координатної площини (двовимірного простору) чи координатного простору (тривимірного простору).

Отже, завжди простір елементарних подій є множиною (або сукупністю) точок (елементів), природа яких, як правило, учням добре відома.

У випадковому експерименті важливим є не тільки наслідок кожного випробування, а й «частота належності» наслідків до певних сукупностей (множин) елементарних подій, що називаються *випадковими подіями* або просто *подіями*.

Зв'язки між поняттями «випадкова подія», «геометрична фігура», «підмножина». Кожна випадкова подія A є певною сукупністю (множиною) деяких точок E простору Ω елементарних подій, а тому $A \subset \Omega$, A є підмножиною множини (простору) елементарних подій Ω. Якщо наслідком певного випробування є елементарна подія така, що належить до множини A, $E \in A$, тобто відбувається попадання точки E у множину $A \subset \Omega$, тоді говорять, що в результаті такого випробування відбулася подія A.

Нагадаємо, що за підручником О.В. Погорєлова з геометрії для 7-9 класів середньої школи кожну геометричну фігуру можна уявляти складеною з точок (див. [7, с. 3]), тобто вважати підмножиною точок даної множини Ω, яка є прямою, площиною чи простором.

Отже, випадкову подію можна уявляти як геометричну фігуру, в точки якої відбувається чи не відбувається попадання у кожному випробуванні.

Виявляється, що не завжди можна або доцільно вважати подією кожну підмножину простору Ω [6].

Таким чином, *у загальному випадку умова, що кожна підмножина простору Ω є випадковою подією, не може бути характеристичною (визначальною) для сукупності випадкових подій, пов'язаних з довільним фіксованим випадковим експериментом. Тому доцільно визначити, які саме умови є визначальними для сукупності подій, пов'язаних з довільним експериментом, тобто які саме підмножини множини Ω слід вважати подіями.*

Виявляється, що ці умови обумовлені насамперед тим, щоб операції над подіями із даної сукупності подій (знаходження суми, добутку, різниці подій та протилежної події) не виводили з цієї сукупності. Зауважимо, що для геометричних фігур операції над ними не виводять із сукупності геометричних фігур (і про це йдеться у шкільних підручниках з геометрії, див. наприклад, [7, с.3]), оскільки геометричною фігурою вважається будь-яка множина точок прямої, площини чи простору.

Отже, сукупність S подій, пов'язаних з довільним випадковим експериментом, визначається умовою замкненості стосовно операцій над подіями. Тому, щоб перевірити, чи можна певну сукупність S підмножин простору Ω елементарних подій вважати *сукупністю подій* (або *простором подій*), треба переконатися, що

1) сукупність S не порожня;
2) якщо $A_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots$, то $\bigcup_i A_i \in S$;

3) якщо $A_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots$, то $\bigcap_i A_i \in S$;

4) якщо $A \in S$, то $\overline{A} \in S$;

5) якщо $A \in S$ і $B \in S$, то $A \setminus B \in S$.

Проте виявляється, що умови 1)–5) виконуються тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні три умови:

1_s. $\Omega \in S$;

2_s. Якщо $A \in S$, то $\overline{A} = \Omega \setminus A \in S$;

3_s. Якщо $A_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots$, то $\bigcup_i A_i \in S$.

Саме тому умови $1_s - 3_s$ називають *основними властивостями простору випадкових подій*. З них випливають усі інші властивості простору подій.

Таким чином, у процесі побудови ймовірнісної моделі даного випадкового експеримента після побудови простору Ω елементарних подій будують зручний для подальших досліджень простір S випадкових подій, який складається з певних підмножин простору Ω і задовольняє умови $1_s - 3_s$. Лише підмножини, що входять до сукупності S, можна називати *випадковими подіями* (стосовно простору S). У процесі досліджень цей простір подій S може неодноразово уточнюватися.

Зауважимо, що умови $1_s - 3_s$ задовольняють сукупності геометричних фігур, що є підмножинами:

- даного відрізка $\Omega = [a;b] \subset R^1$ і мають довжину;
- даного многокутника $\Omega \subset R^2$ і мають площу;
- даного многогранника $\Omega \subset R^3$ і мають об'єм.

При цьому виявляється, що такі сукупності не можуть містити усі підмножини відповідної множини Ω, оскільки:

- кожен відрізок $[a;b]$, де $a < b$, містить фігуру (підмножину), що не має довжини;
- кожен невироджений многокутник містить фігуру (підмножину), що не має площі;
- кожен невироджений многогранник містить фігуру (підмножину), що не має об'єму.

Таким чином, *основні властивості випадкових подій такі самі, як і основні властивості геометричних фігур, що мають довжину, площу або об'єм*.

Розглянемо деякі факти стосовно понять «довжина», «площа» та «об'єм» геометричної фігури.

Основні властивості довжини лінійної фігури. *Лінійною фігурою* називають будь-яку геометричну фігуру, що складається з точок даної прямої (яку можна вважати координатною прямою).

Нагадаємо, що за підручником О.В. Погорєлова [7, с. 7]:

1. Кожний відрізок має певну довжину, не меншу за нуль, причому довжина є нульовою лише коли відрізок вироджується у точку; якщо відрізок лежить на координатній прямій, то він має вигляд множини $[a;b] = \{x \in R^1 : a \le x \le b\}$, а його довжина дорівнює $b - a$.
2. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він поділяється будь якою його точкою (а отже і будь якою скінченною кількістю точок, бо будь яку частину відрізка будь якою його точкою знову можна поділити на дві частини).

Надалі вважатимемо, що всі лінійні фігури є частинами певного відрізка $\Omega = [a;b]$, що має досить велику довжину $b - a$. *Лінійну фігуру* називають *простою*, якщо вона є об'єднанням скінченної або зчисленної кількості проміжків $< a_k; b_k > \subset \Omega = [a;b]$, $k = 1, 2, \ldots$, що не мають попарно спільних точок, а *довжиною цієї простої лінійної фігури* називають суму довжин його складових проміжків $< a_k; b_k >$, тобто суму $\sum_k (b_k - a_k)$. Зауважимо, що проміжок $< a_k; b_k >$ може бути: *відрізком* $[a_k; b_k]$, або *піввідрізком* $[a_k; b_k)$, або *інтервалом* $(a_k; b_k)$, або *півінтервлом* $(a_k; b_k]$, причому за означенням *довжиною* кожного з таких *проміжків* є число $b_k - a_k$.

За означенням довільна *лінійна фігура* $A \subset [a;b]$ *має довжину*, якщо існують прості лінійні фігури, що містять A, і прості лінійні фігури, що містяться в A, довжини яких як завгодно мало відрізняються від одного і того самого числа L. Це число $L = L(A)$ і називають *довжиною лінійної фігури* A.

Якщо згадані прості лінійні фігури не існують, то кажуть, що *лінійна фігура* A *не має довжини*. Відомо, що в довільному відрізку $[a;b]$, де $a < b$, існують фігури, що не мають довжини. Разом з тим сукупність S надзвичайно багата: вона містить будь-які проміжки $< a_k; b_k > \subset [a;b]$, $k = 1, 2, \ldots$, а також їх об'єднання, перерізи та різниці таких об'єднань та перерізів.

Виявляється, що сукупність S лінійних фігур, що є частинами відрізка $\Omega=[a;b]$ і мають довжину, задовольняє умови $1_s - 3_s$, а довжина $L=L(A)$, $A\in S$, таких фігур задовольняє *основні властивості довжини*:

$1_{L.}$ $L(A)\geq 0$ для будь-яких фігур $A\in S$.

$2_{L.}$ Якщо $A_i\in S_i$, $i=1,2,...,$ і фігури A_i не мають попарно спільних точок, то $L(\bigcup_i A_i)=\sum_i L(A_i)$.

Основні властивості площі плоскої фігури. *Плоскою фігурою* називають будь-яку геометричну фігуру, що складається з точок даної площини (яку можна вважати координатною площиною).

За аналогією з лінійними фігурами, що мають довжину, спочатку визначають площі так званих *простих плоских фігур* (див. [7, с. 194]), якими зручно вважати *трикутні* (чи прямокутні) *фігури*, а також об'єднання скінченної або зчисленної кількості таких фігур, що не мають попарно спільних точок, і всі вони є частинами досить великого фіксованого квадрата або трикутника Ω. При цьому *трикутною (прямокутною) фігурою* називають звичайний трикутник (прямокутник), а також трикутник (прямокутник), з якого вилучена частина межових точок або усі межові точки (*межові точки* трикутника (прямокутника) – це точки його сторін). Відрізок зручно вважати трикутною (прямокутною) фігурою з нульовою висотою, точку – трикутною (прямокутною) фігурою з нульовими висотою і основою.

Доцільно вважати, що за означенням *площа довільної трикутної (прямокутної) фігури* дорівнює половині добутку (добутку) довжини основи на висоту, а *площа довільної простої плоскої фігури* дорівнює сумі площ відповідних складових трикутних (прямокутних) фігур.

За означенням довільна *плоска фігура* $A\subset\Omega$ *має площу* (див. [7, с. 201]), якщо існують прості плоскі фігури, що містять A, і прості плоскі фігури, що містяться в A, площі яких як завгодно мало відрізняються від одного і того самого числа Q. Це число $Q=Q(A)$ і називається *площею плоскої фігури* A.

Якщо згадані прості фігури не існують, то кажуть, що *фігура* A *площі не має*. Відомо, що в довільному квадраті Ω існують плоскі фігури, що не мають площі.

До сукупності S плоских фігур, що є частинами квадрата Ω і мають площу, належать довільні многокутники, що є частинами Ω, зокрема, прямокутники, трикутники, трапеції, паралелограми, ромби тощо, а також частини Ω, що є кругами, секторами, сегментами і безліч інших плоских фігур. Разом з тим відомо, що існують фігури, яким неможливо приписати якусь площу (такі фігури площі не мають).

Виявляється, що вказана сукупність S плоских фігур задовольняє умови $1_s - 3_s$, а площа $Q=Q(A)$, $A\in S$, задовольняє *основні властивості площі*:

1_Q. $Q(A)\geq 0$ для будь-яких фігур $A\subset\Omega$.

2_Q. Якщо $A_i\in S$, $i=1,2,3,...,$ і фігури A_i попарно не перетинаються, тобто $A_iA_j=\varnothing$, коли $i\neq j$, то $Q(\bigcup_i A_i)=\sum_i Q(A_i)$.

Основні властивості об'єму просторової фігури. *Просторовою фігурою* називають будь-яку геометричну фігуру, що складається з точок даного тривимірного простору (який можна вважати координатним простором).

За аналогією з довжинами і площами спочатку визначають об'єми так званих *простих просторових фігур* [8, с. 107], якими зручно вважати піраміди (навіть трикутні), а також об'єднання скінченної або зчисленної кількості пірамід, що попарно не мають спільних точок і всі вони є частинами досить великого куба (або піраміди) Ω. При цьому, якщо з піраміди вилучити будь-яку множину межових точок (тобто точок граней піраміди), то утворену просторову фігуру також зручно називати пірамідою.

Будь-який плоский многокутник, що є частиною Ω, зручно вважати пірамідою з нульовою висотою.

Доцільно вважати, що за означенням *об'єм піраміди* – це добуток однієї третьої площі основи на висоту, а *об'єм простої просторової* фігури – це сума об'ємів відповідних складових пірамід.

Довільна *просторова фігура* $A\subset\Omega$ *має об'єм*, якщо існують прості просторові фігури, що містяться в A, і прості просторові фігури, що містять у собі A, об'єми яких як завгодно мало відрізняються від певного одного і того самого числа V. Це число $V=V(A)$ називають *об'ємом просторової фігури* A. Якщо згадані просторові фігури не існують, то кажуть, що *фігура* A *не має об'єму*.

Відомо, що в довільному кубі Ω існують просторові фігури, що не мають об'єму.

До сукупності S просторових фігур, що є частинами куба Ω і мають об'єм, належать довільні многогранники (зокрема, призми, піраміди, зрізані піраміди), конуси, зрізані конуси, кулі і безліч інших просторових фігур, що є частинами фіксованого великого куба Ω.

Виявляється, що ця сукупність S задовольняє умови $1_s - 3_s$, а об'єм $V = V(A)$, $A \in S$, задовольняє основні *властивості об'єму*:

1_V. $V(A) \geq 0$ для будь-яких фігур $A \in S$.

2_V. Якщо $A_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots$, і фігури A_i попарно не перетинаються, $A_i A_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, то $V(\bigcup_i A_i) = \sum_i V(A_i)$.

Загальне поняття міри множини. Оскільки основні властивості довжин, площ та об'ємів за формою однакові, то природно ввести наступне загальне поняття *міри множини*.

Нехай задано деяку непорожню множину Ω.

Розглянемо сукупність S підмножин множини Ω таку, що задовольняє вимоги:

1_s. $\Omega \in S$;

2_s. Якщо $A \in S$, то і $\overline{A} = \Omega \setminus A \in S$;

3_s. Якщо $A_i \in S$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, то і $\bigcup_i A_i \in S$.

Довільну функцію μ, задану на сукупності S підмножин із Ω (аргументами функції μ є множини із сукупності S), яка задовольняє вимоги (має властивості):

1_μ. $\mu(A) \geq 0$ для будь яких A із S;

2_μ. для довільних $A_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots$, таких що $A_i A_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, (тобто A_i і A_j не мають спільних елементів, коли $i \neq j$),

$$\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i),$$

називають *мірою множин* A із S.

При цьому елементи сукупності S (підмножини із множини Ω, що включені до S) називаються *вимірними* за мірою μ. Підмножини із Ω, що не належать до S, називаються *невимірними* за мірою μ.

Отже, довжина, площа та об'єм є прикладами мір відповідно лінійних, плоских та просторових множин (фігур).

Наведемо ще приклади мір, що зустрічаються в шкільних підручниках з математики та фізики.

За підручником О.В. Погорєлова (див. [7, с. 11–14]):

1. Кожний кут має певну градусну міру, не меншу за нуль;
2. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він ділиться будь яким променем, що проходить між його сторонами (а отже і будь-якою скінченною кількістю променів, що проходять між його сторонами, бо будь-яку частину кута будь яким його внутрішнім променем знову можна поділити на частини).
3. Градусна міра розгорнутого кута Ω дорівнює 180°.

Виходячи з цих умов аналогічно до попереднього можна побудувати сукупність S кутових фігур із спільною вершиною, що є частинами розгорнутого кута Ω і задовольняють умови $1_s - 3_s$. Кожна така кутова фігура має градусну міру, що задовольняє умови $1_\mu - 2_\mu$.

Аналогічно можна показати, що масу фізичного тіла також можна розглядати як міру, визначену на сукупності S фізичних тіл, що є частинами досить великого тіла, причому сукупність S задовольняє умови $1_s - 3_s$, а маса тіл – умови $1_\mu - 2_\mu$.

Ще одним прикладом міри множин *є кількість елементів* $k(A)$ у множинах A, що є частинами фіксованої скінченної множини Ω. При цьому сукупність S таких множин A може бути будь-якою сукупністю підмножин множини Ω, аби тільки виконувалися умови $1_s - 3_s$ (зокрема S може містити усі підмножини множини Ω). Легко бачити, що кількість елементів $k(A)$, $A \in S$, задовольняє умови $1_\mu - 2_\mu$.

Нехай $\Omega \neq \varnothing$ фіксована множина, для якої утворено сукупність S підмножин, що задовольняють умови $1_s - 3_s$. Зафіксуємо число $n \in N$, і виберемо з множини Ω навмання одну за однією n точок (кожного разу повертаючи вибрану точку до множини Ω). Для довільної фіксованої множини $A \in S$ позначимо $k_n(A)$ – кількість вибраних точок, що належать до A. Легко бачити, що $k_n(A)$, $A \in S$, є мірою, тобто задовольняє основні властивості міри $1_\mu - 2_\mu$, причому $k_n(\Omega) = n$

Можна навести ще багато інших прикладів мір, заданих на сукупностях множин, що задовільняють вимоги 1_s-3_s.

Ймовірнісна міра. Якщо крім вимог 1_μ-2_μ задовільняється ще і вимога $\mu(\Omega) = 1$, тоді міра μ називається *ймовірнісною мірою* або просто *ймовірністю*. При цьому замість $\mu(A)$ пишуть $P(A)$. Таким чином, ймовірність також є мірою, що задовольняє такі *основні властивості*:

1_p. $P(A) \geq 0$, $A \in S$;

2_p. $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$, якщо $A_i A_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $A_i \in S$, $A_j \in S$;

3_p. $P(\Omega) = 1$.

Набір об'єктів (Ω, S, P) називається *ймовірнісним простором* або *імовірнісною моделлю* даного випадкового експерименту. Лише після побудови цієї моделі множина Ω, із якої в результаті кожного *випробування* (проведення експерименту) навмання вибирається один єдиний елемент, називається *простором елементарних подій* або *множиною можливих наслідків кожного випробування*, елементи множини Ω називаються *елементарними подіями* або можливими *наслідками випробувань*, сукупність S підмножин множини Ω, яка задовільняє вимоги 1_s-3_s, називається *простором подій*, елементи сукупності S (які є підмножинами множини Ω) називаються *подіями*; числа $P(A)$, $A \in S$, де P – ймовірнісна міра, яка задана на S і яка задовільняє вимоги 1_p-3_p, називаються *ймовірностями подій* A, $A \in S$.

Якщо задано ймовірнісний простір (ймовірнісна модель) (Ω, S, P), то тим самим задано певний *розподіл ймовірностей* на множині Ω, оскільки визначено $P(A)$ для кожного $A \in S$.

Нехай на сукупності S підмножин множини Ω, яка задовільняє вимоги 1_s-3_s, задано деяку міру $m(A)$, $A \in S$, таку, що $0 < m(\Omega) < \infty$.

Тоді функція

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \; A \in S,$$

буде ймовірнісною мірою, оскільки така функція задовільняє вимоги 1_p-3_p.

При цьому, якщо в S існують дві множини $A \in S$, $B \in S$, міри яких однакові, тобто $m(A) = m(B)$, то і ймовірнісні міри таких множин (ймовірності відповідних подій A і B) однакові. Разом з тим може трапитись, що в множині S немає двох різних множин, міри яких однакові.

Нехай простір подій S породжений сукупністю вимірних за мірою m підмножин H_1, H_2, …, H_k множини Ω таких, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $H_1 + H_2 + ... + H_k = \Omega$, $m(H_i) = p > 0$ для всіх $i \in \overline{1, k}$, тобто до S входять разом з порожньою множиною всі множини H_i, $P_n^*(H_3) = P_n^*(\{"6"\}) = 0.60$, всеможливі їх суми по 2, по 3, …, по $k-1$ доданків, а також сума із k доданків $H_1 + H_2 + ... + H_k = \Omega$:

$$\begin{aligned} S = \{&\varnothing, H_1, H_2, ..., H_k, H_1 + H_2, H_1 + H_3, ..., H_1 + H_k, \\ &H_2 + H_3, ..., H_2 + H_k, ..., H_{k-1} + H_k, H_1 + H_2 + H_3, \\ &H_1 + H_2 + H_4, ..., H_{k-2} + H_{k-1} + H_k, ..., \\ &H_2 + H_3 + ... + H_{k-1} + H_k, H_1 + H_2 + ... + H_k = \Omega\}. \end{aligned}$$

Зокрема, події H_i можуть бути одноелементними, і тоді простір S буде найширшим з можливих. Якщо ймовірнісна міра на вказаному просторі S визначена за формулою

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \; A \in S,$$

тоді говорять, що *розподіл ймовірностей на множині* Ω *рівномірний* (за множинами H_1, H_2, …, H_k). Для такого розподілу, коли є дві множини однакової міри: $A = \bigcup_{i \in I} H_i \in S$ і $B = \bigcup_{i \in J} H_i \in S$,

$I \subset \{1, 2, ..., k\}$, $J \subset \{1, 2, ..., k\}$, $m(A) = m(B) \Rightarrow m(\bigcup_{i \in I} H_i) = m(\bigcup_{i \in j} H_i)$, тоді $k(I) = k(J)$, де $k(I)$, $k(J)$ – кількість елементів у множинах I та J, а тому

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{m(\bigcup_{i \in I} H_i)}{m(\Omega)} = \frac{\sum_{i \in I} m(H_i)}{m(\Omega)} = \sum_{i \in I} P(H_i) = \frac{k(I)}{k} =$$

$$= \frac{m(\bigcup_{i \in J} H_i)}{m(\Omega)} = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \frac{\sum_{i \in J} m(H_i)}{m(\Omega)} = \sum_{i \in J} P(H_i) = \frac{k(J)}{k} = P(B).$$

У випадку, коли усі H_i є одноелементними множинами, одержимо $P(A) = \frac{k(A)}{K}$, $A \in S$, де $k(A)$ – кількість елементів у множині A, а $K = k(\Omega)$ – кількість елементів в множині Ω.

При такому заданні ймовірнісної міри (ймовірності) весь обчислювальний апарат (комбінаторика і ін.) використовується так само, як і при так званому “класичному підході”.

Разом з тим немає жодної потреби в так званому “класичному означенні ймовірності”, в якому ймовірність події A, $A \in S$, означається через ймовірності рівноймовірних елементарних подій, в результаті чого утворюється так зване зачароване коло [6].

Якщо при заданні ймовірнісної міри рівністю $P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)}$, $A \in S$, ($k(A)$ – кількість елементів множини A) розглядається найширший простір подій, до якого входять всі підмножини скінченної множини Ω (порожня множина, одноелементні, двоелементні, триелементні і т.д. множини), тоді виявляється, що ймовірність кожної елементарної події, яка ототожнюється з відповідною одноелементною множиною, дорівнює $\frac{1}{m}$, де $m = k(\Omega)$. Однак може трапитись, що до сукупності S не входять всі одноелементні події, і тоді питання про ймовірності всіх елементарних подій втрачає смисл, оскільки імовірнісна міра $P(A)$ визначається лише на елементах сукупності S (сукупність S підмножин множини Ω є областю задання функції $P(A)$, $A \in S$).

Нехай, наприклад, $\Omega = \{"1", "2", "3", "4", "5", "6"\}$ (експеримент полягає у підкиданні шестигранного грального кубика),

$$H_1 = \{"1", "2"\},\ H_2 = \{"3", "4", "5", "6"\},\ H_1 H_2 = \varnothing,\ H_1 + H_2 = \Omega,$$

$$S = \{\varnothing, H_1, H_2, H_1 + H_2\} =$$

$$= \{\varnothing, \{"1", "2"\}, \{"3", "4", "5", "6"\}, \{"1", "2", "3", "4", "5", "6"\} = \Omega\},$$

$$m(A) = k(A),\ P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{k(A)}{k(\Omega)},\ A \in S.$$

Тоді

$$m(\varnothing) = 0,\ m(\Omega) = 6,\ m(\{"1","2"\}) = 2,\ m(\{"3","4","5","6"\}) = 4,\ P(\varnothing) = 0,\ P(\Omega) = 1,$$

$$P(\{"1","2"\}) = \frac{2}{6},\ P(\{"3","4","5","6"\}) = \frac{4}{6}.$$

Ніяких інших подій, окрім наведених, в просторі подій S немає.

Таким чином, в разі, коли ймовірнісна міра на S задається як $P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)}$, $A \in S$, Ω – скінченна множина, $k(\Omega) = m$, через $P(A)$ можуть бути визначені ймовірності тільки тих елементарних подій, що ототожнюються з відповідними одноелементними підмножинами, які є елементами S, однак не навпаки, ймовірність довільної події $A \in S$ не може бути визначена через ймовірності відповідних елементарних подій, оскільки таких подій в S може не бути.

Нагадаємо, що за означенням статистичної ймовірності (див. [6, с. 22], [9, с. 39])

$$P_n^*(A) = \frac{k_n(A)}{k_n(\Omega)} = \frac{k_n(A)}{n},\ A \in S.$$

Якщо в результаті великої серії із n випробувань, що полягали в підкиданні шестигранного грального кубика, в яких дослідника цікавило лише випадання на верхній грані кубика шести та п’яти очок, з’ясувалося, що $P_n^*(\{"6"\}) = 0.60$, $P_n^*(\{"5"\}) = 0.30$, $P_n^*(\{"1","2","3","4"\}) = 0.10$, то можна говорити про статистичні ймовірності попадання лише в множини із сукупності S:

$$S = \{\varnothing, H_1, H_2, H_3, H_1 + H_2, H_1 + H_3, H_2 + H_3, H_1 + H_2 + H_3 = \Omega\},$$

де

$$H_1 = \{"1","2","3","4"\},\ H_2 = \{"5"\},\ H_3 = \{"6"\}.$$

По суті в даному експерименті лише три можливих наслідки: $H_2 = \{"5"\}$, $H_3 = \{"6"\}$, $H_1 = \Omega \setminus (\{"5"\} \cup \{"6"\}) = \{"1","2","3","4"\}$, тобто або "5", або "6", або і не "5" і не "6", хоча здається, що наслідків 6: $E_1 ="1"$, $E_2 ="2"$, $E_3 ="3"$, $E_4 ="4"$, $E_5 ="5"$, $E_6 ="6"$.

Очевидно $P_n^*(\varnothing) = 0$, $P_n^*(H_1) = P_n^*(\{"1", "2", "3", "4"\}) = 0.10$,

$P_n^*(H_2) = P_n^*(\{"5"\}) = 0.30$, $P_n^*(H_3) = P_n^*(\{"6"\}) = 0.60$,

$P_n^*(H_1 + H_2) = P_n^*(\{"1", "2", "3", "4", "5"\}) = 0.40$,

$P_n^*(H_1 + H_3) = P_n^*(\{"1", "2", "3", "4", "6"\}) = 0.70$,

$P_n^*(H_2 + H_3) = P_n^*(\{"5", "6"\}) = 0.90$,

$P_n^*(H_1 + H_2 + H_3) = P_n^*(\{"1", "2", "3", "4", "5", "6"\}) = 1.0$.

Однак питання про статистичні ймовірності попадання в будь-які інші підмножини множини Ω, окрім тих, що входять до S, наприклад в підмножини $\{"1", "3", "5"\}$, $\{"2", "4", "6"\}$, $\{"1", "2"\}$ тощо, а також питання про статистичні ймовірності елементарних подій $E_1 ="1"$, $E_2 ="2"$, $E_3 ="3"$, $E_4 ="4"$, та визначення через статистичні ймовірності елементарних подій статистичних ймовірностей всіх інших подій втрачають смисл. За даних умов знайти відповіді на такі питання неможливо.

Приклад. Двоє домовилися зустрітися протягом години (між 18^{00} і 19^{00}), причому зустріч відбудеться, якщо час очікування один одного виявиться не більшим за 15 хв. Потрібно знайти

ймовірність того, що вони зустрінуться, якщо ймовірності попадання моментів приходу в будь які проміжки часу між 18^{00} і 19^{00} однакової довжини однакові, незалежно від того, коли приходить інший, тобто однаково імовірно, наприклад, що перший з них прийде до місця зустрічі на проміжку часу

$18^{00} – 18^{01}$, чи на проміжку часу $18^{20} – 18^{21}$, чи на проміжку часу $18^{59} – 19^{00}$, чи на будь якому іншому проміжку цієї ж довжини, незалежно від того коли приходить інший. Те саме стосується і іншої особи.

Експеримент полягає у виборі навмання пари чисел (x_1, y_1), де x_1 – час після 18^{00}, коли прийде перша особа, y_1 – час приходу другої особи. Результатом такого експерименту є пара чисел (x_1, y_1), тобто точка із двовимірного простору (точка на площині), причому координати (абсциса x_1 і ордината y_1) цієї точки очевидно задовольняють вимоги $18 \le x_1 \le 19$; $18 \le y_1 \le 19$. Це рівносильно тому, що координати $x = x_1 - 18$ та $y = y_1 - 18$ задовольняють умови $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Множина всіх точок (x, y), де $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$, заповнює квадрат $\Omega \in [0,1] \times [0,1]$ (рис. 1).

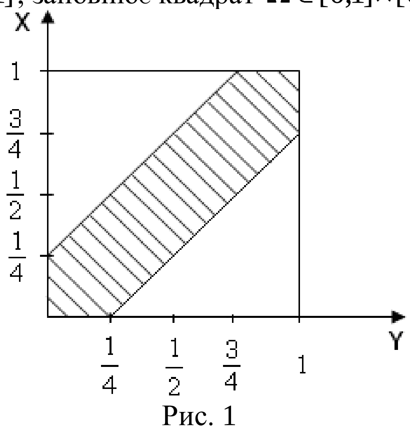

Рис. 1

За умовою задачі згадані особи зустрінуться, якщо модуль різниці між моментами приходу кожного з них до місця зустрічі не перевищуватиме $\frac{1}{4}$ години (15 хв.), тобто якщо виконуватиметься умова $|y_1 - x_1| = |y - x| \le \frac{1}{4}$, або, що те саме, $x - \frac{1}{4} \le y \le x + \frac{1}{4}$. На рис. 1 множина точок, координати яких задовольняють умову $|y - x| \le \frac{1}{4}$ (чи, що те саме, $|x - y| \le \frac{1}{4}$), заштрихована.

Нехай проміжок $[a;b]\subset[0;1]$, проміжок $[c;d]\subset[0;1]$. Тоді прямокутник $[a;b]\times[c;d]\subset[0;1]\times[0;1]=\Omega$, причому природно покласти $\tilde{m}([a;b]\times[c;d])=m([a;b])\cdot m([c;d])$, – це площа прямокутника $[a;b]\times[c;d]$. Якщо момент приходу першого попадає на фіксований проміжок $[a_1;b_1]$, то однаково імовірно, що момент приходу другого буде знаходитись на проміжку $[c_1;d_1]$, чи $[c_2;d_2]$, довжини яких однакові. Якщо міри (довжини) проміжків $[c_1;d_1]$ і $[c_2;d_2]$ однакові, то імовірності попадання точки (x,y) у прямокутники $[a_1;b_1]\times[c_1;d_1]$ і $[a_1;b_1]\times[c_2;d_2]$ однакові. Аналогічно, якщо міри (довжини) проміжків $[a_1;b_1]$ і $[a_2;b_2]$ однакові, а $[c_1;d_1]$ – фіксований проміжок, то і ймовірності попадання точки (x,y) в прямокутники $[a_1;b_1]\times[c_1;d_1]$ і $[a_2;b_2]\times[c_1;d_1]$ однакові. Таким чином, якщо міри (площі) прямокутників $[a_1;b_1]\times[c_1;d_1]$ і $[a_2;b_2]\times[c_2;d_2]$ однакові, то і ймовірності попадання точки (x,y) в такі прямокутники однакові. Тому розподіл ймовірностей на множині Ω, тобто імовірнісна міра $\tilde{P}$ на сукупності $\tilde{S}$ підмножин множини Ω, які мають площу (вимірні за мірою $\tilde{m}$), може бути задана за формулою

$$\tilde{P}(A)=\frac{\tilde{m}(A)}{\tilde{m}(\Omega)},\ A\in\tilde{S}\,.$$

Оскільки в даному прикладі

$$\tilde{m}(\Omega)=\tilde{m}([0,1]\times[0,1])=m([0,1])\cdot m([0,1])=1\cdot 1=1,$$

а

$$\tilde{m}(A)=1-(3/4)^2=\frac{9}{16},$$

то шукана ймовірність (попадання точки (x,y) в заштриховану область на рис. 1) дорівнює

$$\tilde{P}(A)=\frac{\tilde{m}(A)}{\tilde{m}(\Omega)}=\frac{(1-(3/4)^2)}{1}=\frac{7}{16}.$$

Висновки. 1. Основні стохастичні поняття є аналогами багатьох математичних понять, добре знайомих більшості учнів. Тому при вивченні елементів стохастики (і не тільки) вельми доцільним є використання методу аналогій, що дозволяє учням не опановувати з великими зусиллями абсолютно нові для них факти, а впізнавати в них добре відомі факти, які вони опанували раніше.

2. Науковість навчання математики не суперечить доступності навчання, а лише сприяє їй, оскільки, як говорив всесвітньо відомий математик Д. Гільберт: «Прагнення до строгості примушує нас шукати найпростіші міркування. Це прагнення часто прокладає шлях до методів, що є пліднішими, ніж старі, менш строгі методи» [10, с. 104].

ЛІТЕРАТУРА

1. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974 – 120 с.
2. Михалін Г.О., Слука О.В. Про навчання основних понять теорії ймовірностей у шкільному курсі математики // Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання. Збірник наукових праць. – Київ: Комп’ютер в школі та сім’ї. – 2001. – Вип. 3. – с. 167-173.
3. Програма для класів з поглибленим вивчення математики. 8-11 класи. – Київ: Шкільний світ. 2001. – 36 с.
4. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Навчальні програми для профільного навчання. Програми факультативів, спецкурсів, гуртків. Математика. – Київ: Навчальна книга. 2001. – 304 с.
5. Математика. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. 5-12 класи. – Київ-Ірпінь: Перун. 2005. – 65 с.
6. Жалдак М.І., Михалін Г.О. Елементи стохастики з комп’ютерною підтримкою. Посібник для вчителів. – Київ: Шкільний світ. 2006. – 119 с.
7. Погорєлов О.В. Геометрія. Планіметрія. Підручник для 7-9 класів середньої школи. Затверджено Міністерством освіти України. – Київ: Освіта. 1994. – 224 с.
8. Погорєлов О.В. Геометрія. Стереометрія. Підручник для 10-11 класів середньої школи. Затверджено Міністерством освіти України. – Київ: Освіта, 1997. – 144 с.
9. Жалдак М.І., Михалін Г.О. Елементи стохастики. Збірник задач і вправ. Посібник для вчителів (у 2-х частинах). – Київ: Шкільний світ. 2008. – ч.1 – 124 с., ч.2 – 64 с.
10. Рид К. Гильберт. – М.: Наука, 1977. – 368 с.