Бугаєць Н.О.
НПУ імені М.П. Драгоманова

Графічне дослідження загального рівняння кривої другого порядку за допомогою комп'ютера

Дослідницька навчальна діяльність стимулює розвиток таких творчих особистісних якостей, як здатність висувати гіпотези, генерувати ідеї, помічати закономірності, переносити знання і уміння в нові ситуації. Завдання викладача полягає не тільки в тому, щоб подати певний об'єм відомостей, а і вчити оволодівати новими знаннями. Застосування комп'ютера як інструмента досліджень приводить до помітного поліпшення результатів навчального процесу.

Використання ППЗ Gran1 під час вивчення теми «Криві другого порядку на площині» в курсі аналітичної геометрії дозволяє провести графічне дослідження загального рівняння кривої другого порядку.

Загальне рівняння кривої другого порядку на площині має вигляд

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} > 0, \qquad (1)$$

в якому коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{22} не дорівнюють нулю одночасно, $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Для створення графіка кривої в ППЗ Gran1 у вікні «Список об'єктів» обираємо «Неявна $0 = G(X,Y)$», виконуємо послугу «Об'єкт/Створити» та у вікні «Введення виразу залежності» в рядок «0 = » записуємо вираз даного рівняння:

P1*X^2+2*P2*X*Y+P3*Y^2+2*P4*X+2*P5*Y+P6, де параметри *P1, P2, ... P6* відповідають коефіцієнтам $a_{11}, a_{12}, ..., a_{33}$ відповідно. В рядках «A=» і «B=» вказуємо верхню і нижню межу відрізка, на якому змінюється змінна *x*, а в рядках «Ay=» і «By=» – межі відрізка, на якому змінюється змінна *y*. Виконавши послугу «Графік/Побудувати», отримаємо зображення графіка. Плавно змінюючи значення параметрів, можна прослідкувати за зміною графічних образів, які задаються рівнянням (1) та помітити певні закономірності стосовно зміни коефіцієнтів.

Спочатку розглянемо неповне рівняння та визначимо всі можливі випадки. Якщо в рівнянні (1) або $a_{12} = 0$ (відсутній доданок з добутком змінних), або $a_{11} = a_{22} = 0$ (відсутні доданки з квадратами змінних), то таке рівняння називають *неповним*.

Аналіз графіків неповного рівняння кривої другого порядку при різних значеннях параметрів показує, що при $a_{11}a_{22} > 0$, $a_{12} = 0$ геометричним образом рівняння можуть бути еліпс (коло при $a_{11} = a_{22}$), або точка, або уявний еліпс. Тому випадок $a_{11}a_{22} > 0$, $a_{12} = 0$ називають *еліптичним* (Рис. 1а, 1б).

В той же час у випадку $a_{11}a_{22} < 0$, $a_{12} = 0$ геометричним образом рівняння можуть бути тільки гіпербола або пара прямих, що перетинаються, які можна розглядати як вироджений випадок гіперболи. Аналогічна ситуація у випадку $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} \neq 0$. Ці випадки називають *гіперболічними* (Рис. 2а, 2б, 2в).

Нарешті, якщо в рівнянні з трьох коефіцієнтів при доданках другого порядку відмінний від нуля тільки один, a_{11} або a_{22}, то геометричним образом може бути або парабола, або пара паралельних прямих чи пара прямих, що співпадають. Цей випадок називають *параболічним* (Рис. 3а, 3б, 3в).

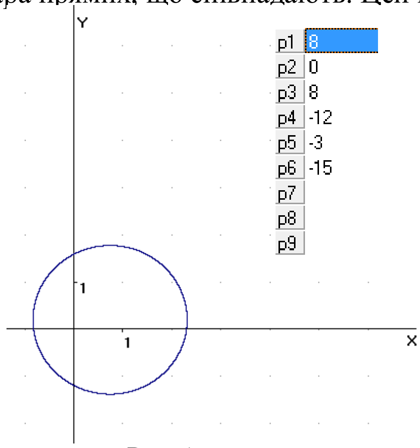

Рис. 1а

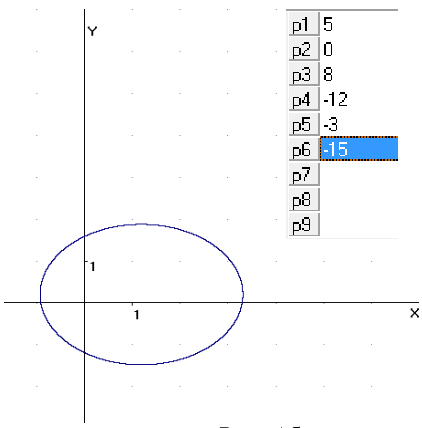

Рис. 1б

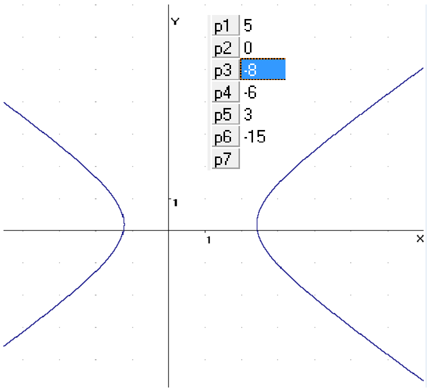

Рис. 2а.

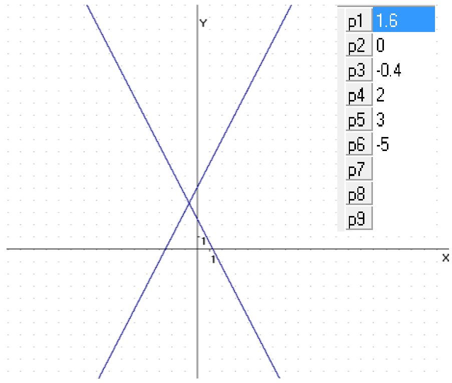

Рис. 2б.

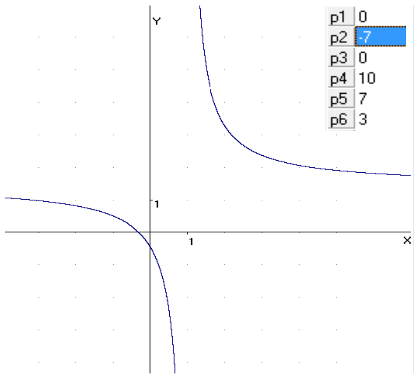

Рис. 2в.

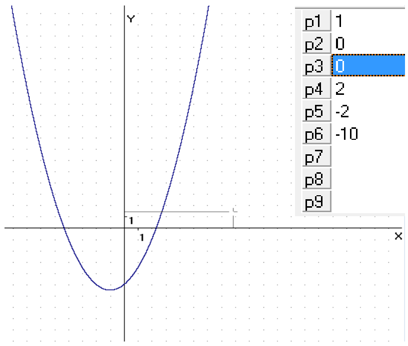

Рис. 3а.

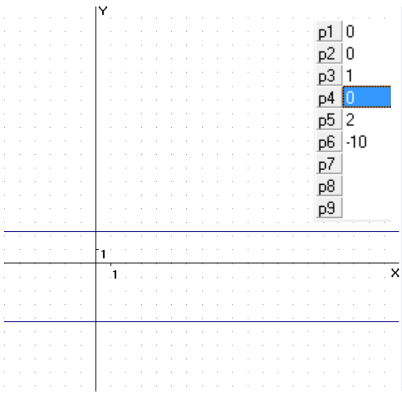

Рис. 3б.

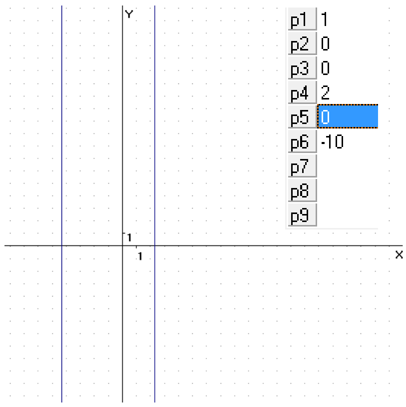

Рис. 3в.

Розглянемо тепер рівняння (1), коли всі коефіцієнти групи старших членів відмінні від нуля.

Лінія, що визначається рівнянням (1), не змінюється, якщо від даної декартової прямокутної системи координат перейти до іншої декартової системи координат. Тобто дане рівняння (1) та рівняння, яке отримуємо після перетворення координат, еквівалентні [2]. Причому при паралельному перенесенні системи координат коефіцієнти групи старших членів не змінюються.

Геометричні характеристики ліній 2-го порядку та їх розташування повністю визначаються значеннями інваріантів I_1, I_2, I_3 [4].

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \qquad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \qquad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Нехай маємо таку декартову систему координат $O'x'y'$ (отриману паралельним перенесенням системи Oxy), в якій рівняння кривої другого порядку не містило б доданків $a'_{13}x'$ та $a'_{23}y'$, тобто коефіцієнти a_{13} та a_{23} рівні нулю. При паралельному перенесенні системи координат коефіцієнти групи старших членів (a_{11}, a_{12}, a_{22}) не змінюються.

Тоді

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)a_{33}.$$

Плавно змінюючи значення параметрів *P1, P2, ..., P6* в Gran1, які відповідають коефіцієнтам a_{11}, a_{12}, $a_{22}, ..., a_{33}$ та обчислюючи значення інваріантів, слідкуємо за зміною графічних образів, які задаються рівнянням (1). В результаті помічаємо, що всі лінії, які визначаються рівнянням (1), поділяються на наступні три типи.

1. Лінії *еліптичного типу* ($I_2 > 0$) (Рис. 4).

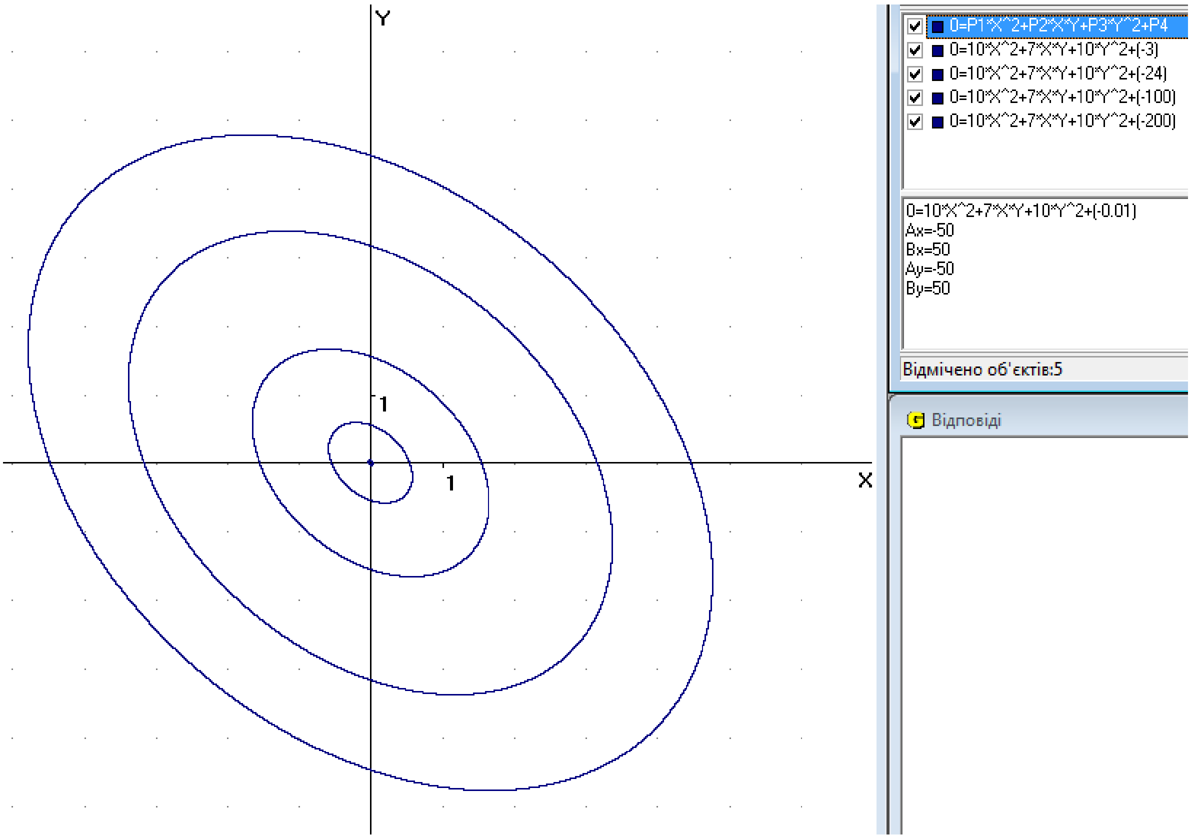

Рис.4

Оскільки $I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, то $a_{11}a_{22} > 0$ тобто коефіцієнти $a_{11} = P1$ і $a_{22} = P3$ обидва відмінні від нуля і мають однаковий знак, який співпадає із знаком I_1. Тому можна вважати обидва ці коефіцієнти додатними (цього завжди можна досягти, помноживши дане рівняння на -1). Отже, спостерігаючи за зміною динамічних графічних образів, встановлюємо, що якщо $I_1 > 0$ та $I_2 > 0$, то при $I_3 < 0$ це рівняння являє собою еліпс, при $I_3 = 0$ – координати лише однієї точки (вироджений еліпс), при $I_3 > 0$ дане рівняння не задовольняють координати жодної точки (уявний еліпс).

2. Лінії *гіперболічного типу* ($I_2 < 0$) (Рис. 5).

Якщо $I_2 < 0$, то рівняння (1) визначає лінію гіперболічного типу. Причому, якщо $I_3 \neq 0$, то маємо гіперболу, а при $I_3 = 0$ – пару прямих, що перетинаються.

Змінюючи в рівнянні параболічного типу параметр, що відповідає вільному члену (коефіцієнт a_{33}), помічаємо, що всі криві, які відрізняються тільки вільними членами, мають спільні асимптоти, які визначаються даним рівнянням при $a_{33} = 0$.

3. Лінії *параболічного типу* $I_2 = 0$ (Рис. 6).

Рівняння лінії (1) при $I_2 = 0$ є рівнянням параболічного типу і визначає параболу якщо $I_3 \neq 0$. Якщо ж $I_3 = 0$, то маємо пару паралельних прямих (які можуть співпадати) або пару уявних паралельних прямих.

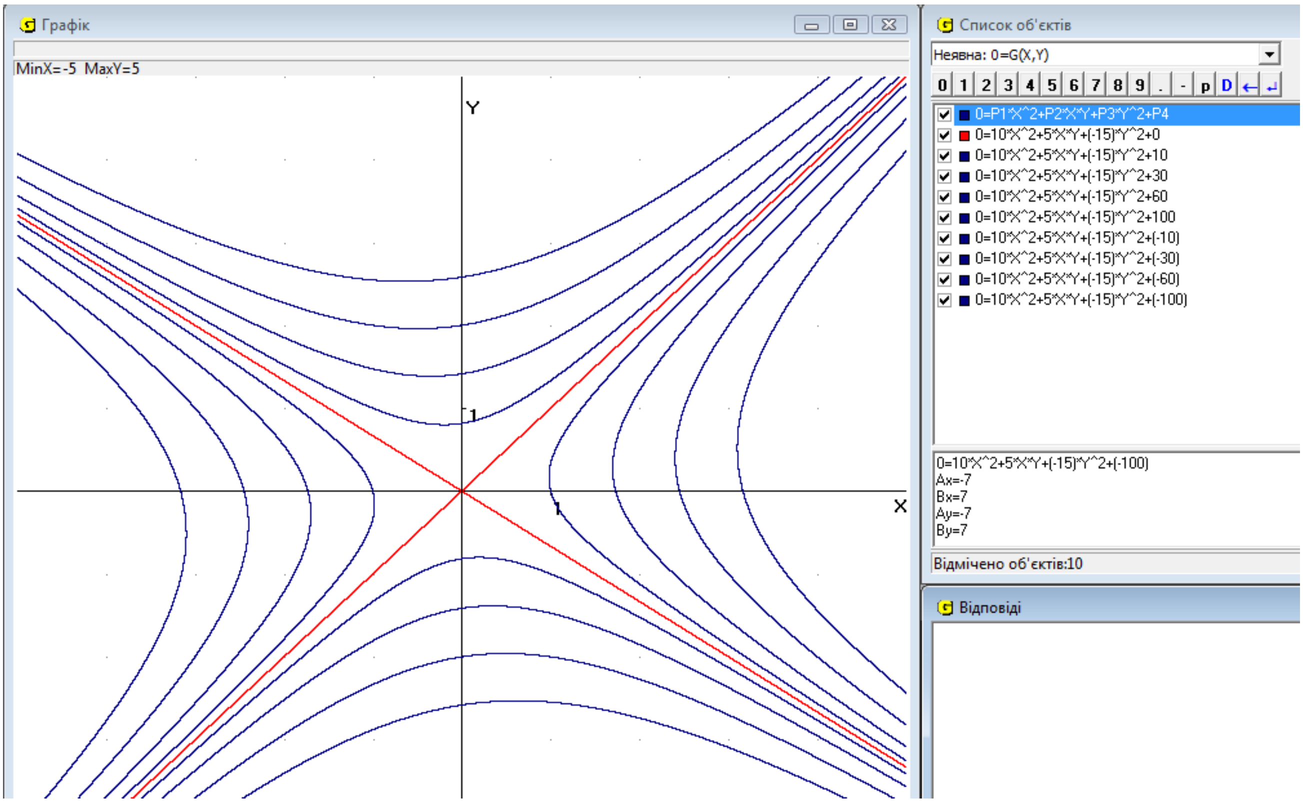

Рис. 5

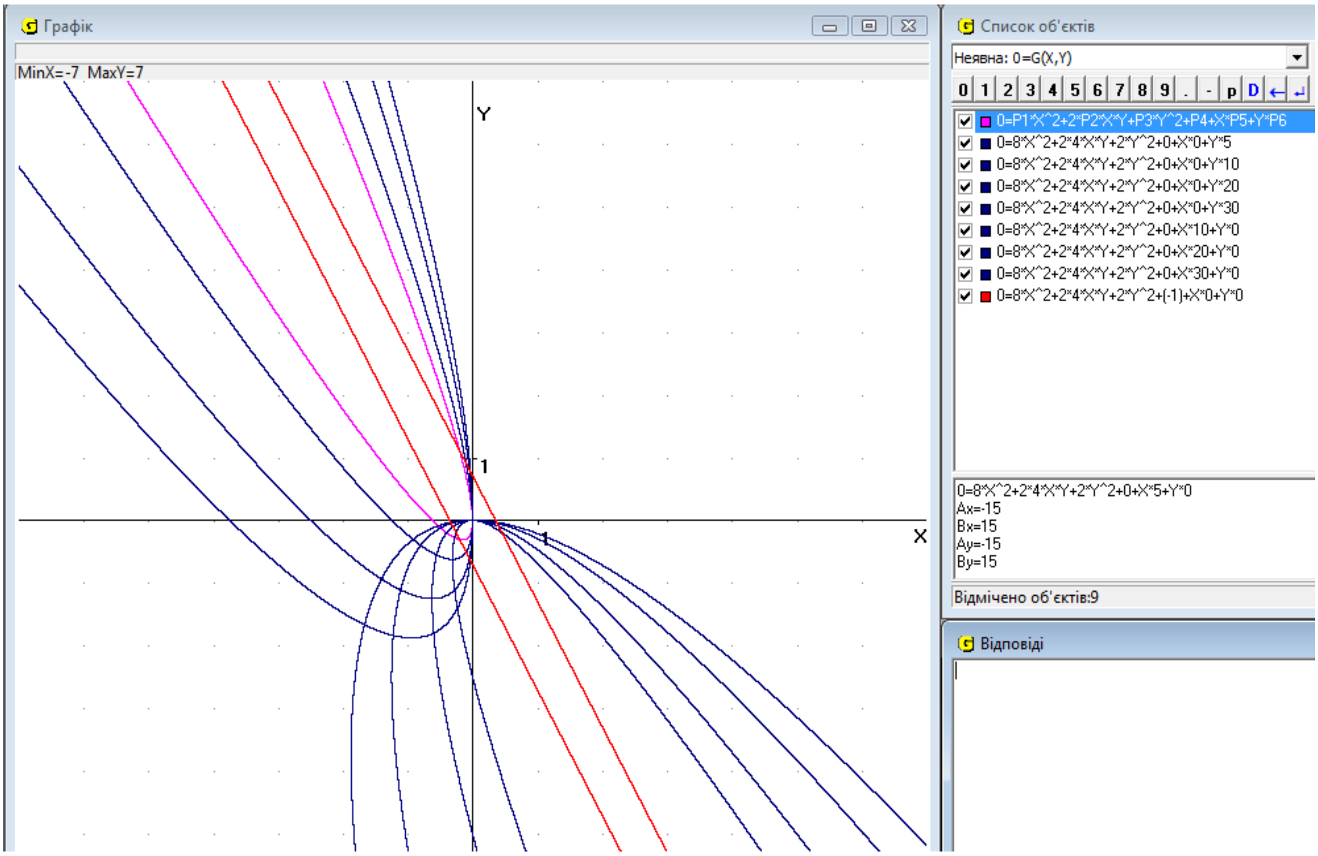

Рис. 6

Отримані результати можна подати у вигляді таблиці:

	$I_3 \neq 0$	$I_3 = 0$
$I_2 > 0$	Еліпс (дійсний або уявний)	Уявні прямі, що перетинаються в дійсній точці
$I_2 = 0$	Парабола	Паралельні прямі (дійсні, уявні або такі, що збігаються)
$I_2 < 0$	Гіпербола	Дійсні прямі, що перетинаються

Аналітичне обґрунтування даних випадків розглядається, наприклад, в [4].

На проведення графічного дослідження лінії другого порядку студентам можна запропонувати наступні задачі.

Приклад 1. Які криві визначаються рівнянням $x^2 - 2xy + ay^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ при різних значеннях параметрах *a*?

Побудуємо графік даного рівняння. У вікні «Список об'єктів» обираємо «Неявна: $0 = \mathrm{G(X,Y)}$», звертаємося до послуги «Об'єкт/Створити» та у вікні «Введення виразу залежності» вводимо X^2–2*X*Y+P1*Y^2–4*X–6*Y+3=0, де P1 – параметр, який відповідає заданому параметру *a*. Для кращої наочності нехай змінні *x* та *y* змінюються на відрізку [–22; 22], тобто $\mathrm{A} = -22$, $\mathrm{B} = 22$, $\mathrm{Ay} = -22$, $\mathrm{By} = 22$.

При зміні параметра P1 отримуємо все нові і нові зображення, які можна фіксувати, користуючись послугою «Об'єкт/Новий об'єкт з зафіксованими параметрами». В результаті одержимо зображення, подані рис. 7.

Змінюючи P1 в межах від –25 до 25 з кроком 0,5, встановлюємо, що дане рівняння зображує еліпс при $\mathrm{P1} > 1$, параболу – при $\mathrm{P1} = 1$. А при $\mathrm{P1} < 1$ рівняння визначає гіперболу, до того ж в окремому випадку, коли $\mathrm{P1} = -24$, гіпербола перетворюється на дві прямі, що перетинаються (Рис. 7).

Щоб розв'язати задачу аналітично, обчислюємо другий та третій інваріанти:

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{vmatrix} = a - 1. \qquad I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & a & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -a - 24$$

Звідси випливає, що дійсно при $a = 1$ маємо параболу, при будь-якому $a > 1$ – еліпс, при будь-якому $a < 1$ – лінію гіперболічного типу, причому, якщо $I_3 = 0$, а отже $a = -24$, гіпербола розпадається на дві прямі, що перетинаються.

Приклад 2. Який вигляд мають криві, що визначаються рівнянням $2x^2 + 5xy - 3y^2 - 3x + ay - 2 = 0$, при різних значеннях параметра *a*?

Дану задачу розв'язуємо аналогічно до попередньої. Вираз залежності для даного рівняння в Gran1 має вигляд 2*X^2+5*X*Y–3*Y^2–3*X+P1*Y–2=0, де P1=*a*.

Змінюємо параметр P1 від –25 до 25 з кроком 0,5 і фіксуємо його деякі значення за допомогою послуги «Об'єкт/Новий об'єкт із зафіксованими параметрами», щоб отримати кілька зображень лінії, визначеної даним рівнянням (Рис. 8).

З побудованих графіків бачимо, що дане рівняння визначає криву гіперболічного типу, яка при $\mathrm{P1} = 5$ та при $\mathrm{P1} = -12{,}5$ розпадається на дві прямі, що перетинаються.

Справді, обчисливши другий та третій інваріанти для даного рівняння, маємо $I_2 < 0$ незалежно від значення *a*. А $I_3 = 0$, якщо $a = 5$ або $a = -12{,}5$.

З малюнка видно, що всі побудовані криві перетинають вісь абсцис в двох точках $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ та $x_2 = 2$. Це спонукає студентів замислитись, чому це так і як цьому можна знайти аналітичне пояснення.

Розглянувши такі приклади, студенти можуть складати свої подібні задачі і проводити графічні дослідження самостійно.

Також у процесі вивчення лінійної алгебри та аналітичної геометрії студентам доводиться розв'язувати типові задачі на встановлення типу кривої другого порядку, лінійного перетворення змінних з метою спрощення загального рівняння кривої другого порядку на площині. Розв'язування таких задач вимагає виконання значної кількості обчислювальних операцій. Тому корисно доповнити аналітичні обчислення використанням графічних образів, створених за допомогою ППЗ Gran1. Аналіз графіків, створених за допомогою даної програми, дає можливість перевірити остаточний результат, уникнути помилок, переконатися в правильності розв'язання.

В задачах на дослідження кривих другого порядку, що задані в прямокутній системі координат загальними рівняннями, як правило, вимагається визначити канонічне рівняння і визначити в системі координат Oxy: для параболи – координати вершини і фокуса; для еліпса – координати центра, вершин і фокусів, а також рівняння директрис, а для гіперболи – ще і рівняння асимптот.

Розглянемо задачу.

Приклад 3. Встановити вид кривої, заданої рівнянням $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 52x - 64y + 164 = 0$ у прямокутній декартовій системі координат, побудувати графік, дослідити її властивості.

Для побудови кривої, заданої даним рівнянням, необхідно створити об'єкт типу «Неявна». У вікні «Введення виразу залежності» в рядок «0 =» записуємо 5*X^2+4*X*Y+8*Y^2–52*X–64*Y+164. В результаті одержимо еліпс (Рис. 9).

Як видно з рисунка, щоб записати рівняння даного еліпса в канонічному вигляді, необхідно виконати перетворення координат, а саме поворот та паралельне перенесення.

Поворот координатних осей виконаємо за формулами:

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y &= x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{aligned} \qquad (2)$$

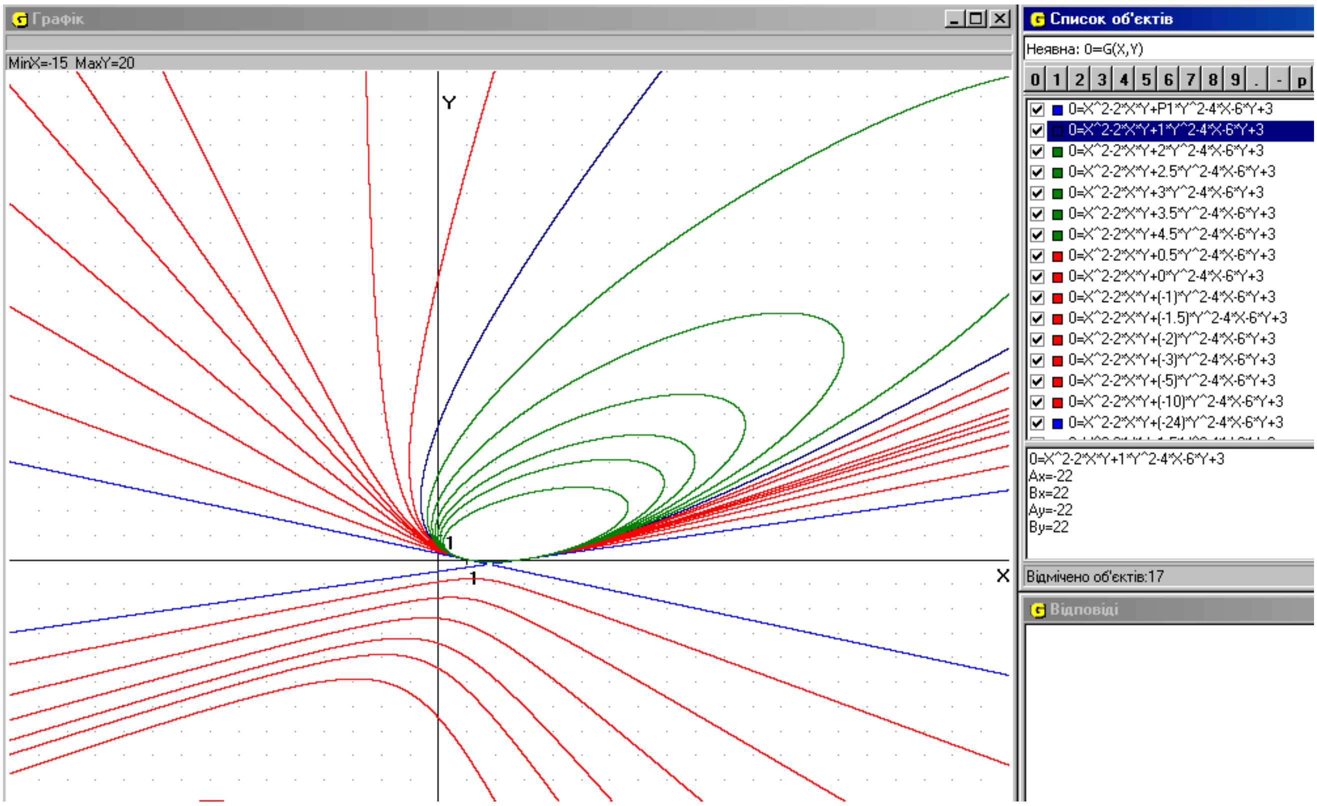
Графік
MinX=-15 MaxY=20
Y
X
1
1
Список об'єктів
Неявна: 0=G(X,Y)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 . - p
0=X^2-2*X*Y+P1*Y^2-4*X-6*Y+3
0=X^2-2*X*Y+1*Y^2-4*X-6*Y+3
0=X^2-2*X*Y+2*Y^2-4*X-6*Y+3
0=X^2-2*X*Y+2.5*Y^2-4*X-6*Y+3
0=X^2-2*X*Y+3*Y^2-4*X-6*Y+3
0=X^2-2*X*Y+3.5*Y^2-4*X-6*Y+3
0=X^2-2*X*Y+4.5*Y^2-4*X-6*Y+3
0=X^2-2*X*Y+0.5*Y^2-4*X-6*Y+3
0=X^2-2*X*Y+0*Y^2-4*X-6*Y+3
0=X^2-2*X*Y+(-1)*Y^2-4*X-6*Y+3
0=X^2-2*X*Y+(-1.5)*Y^2-4*X-6*Y+3
0=X^2-2*X*Y+(-2)*Y^2-4*X-6*Y+3
0=X^2-2*X*Y+(-3)*Y^2-4*X-6*Y+3
0=X^2-2*X*Y+(-5)*Y^2-4*X-6*Y+3
0=X^2-2*X*Y+(-10)*Y^2-4*X-6*Y+3
0=X^2-2*X*Y+(-24)*Y^2-4*X-6*Y+3
0=X^2-2*X*Y+1*Y^2-4*X-6*Y+3
Ax=-22
Bx=22
Ay=-22
By=22
Відмічено об'єктів:17
Відповіді

Рис. 7

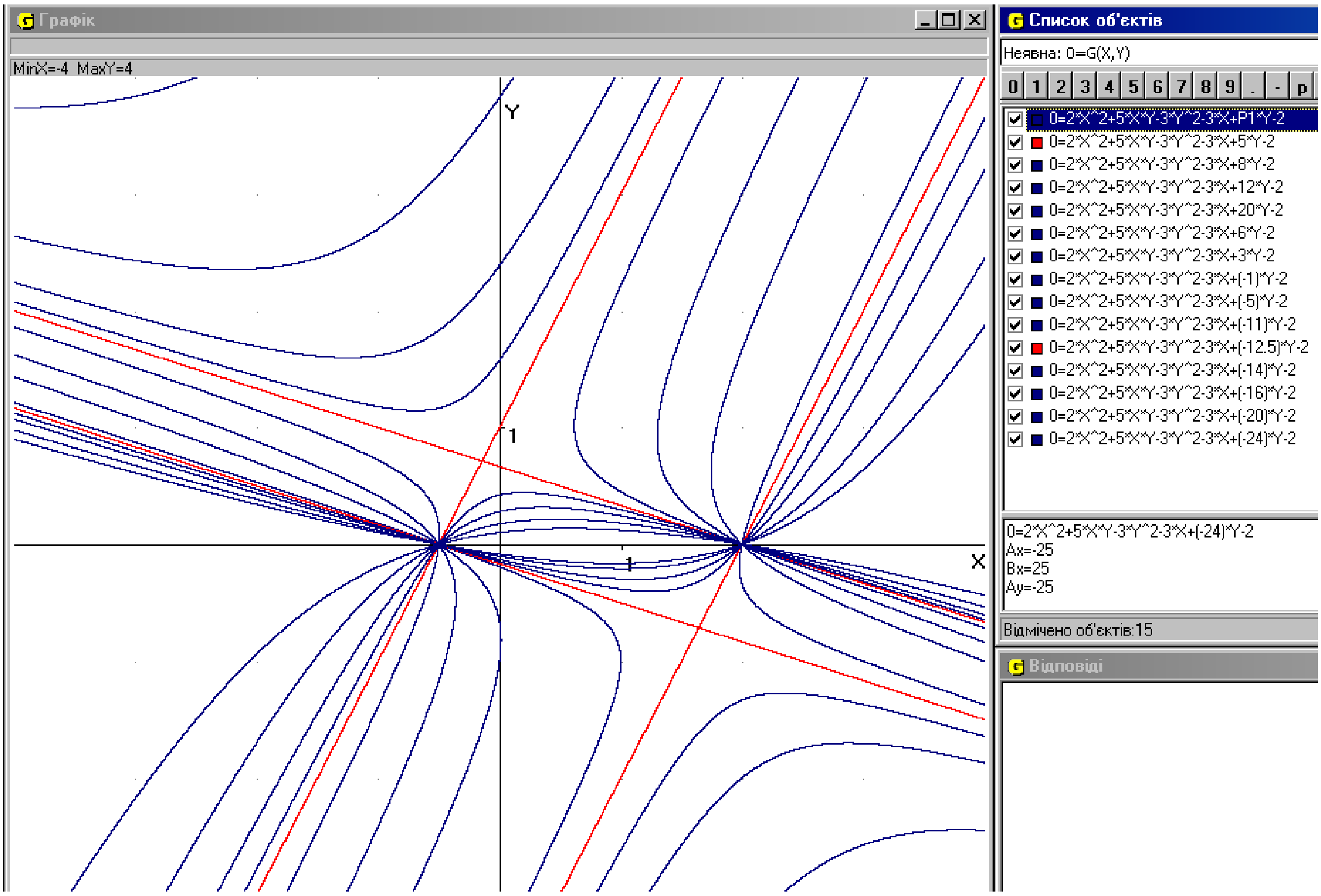
Графік
MinX=-4 MaxY=4
Y
X
1
1
Список об'єктів
Неявна: 0=G(X,Y)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 . - p
0=2*X^2+5*X*Y-3*Y^2-3*X+P1*Y-2
0=2*X^2+5*X*Y-3*Y^2-3*X+5*Y-2
0=2*X^2+5*X*Y-3*Y^2-3*X+8*Y-2
0=2*X^2+5*X*Y-3*Y^2-3*X+12*Y-2
0=2*X^2+5*X*Y-3*Y^2-3*X+20*Y-2
0=2*X^2+5*X*Y-3*Y^2-3*X+6*Y-2
0=2*X^2+5*X*Y-3*Y^2-3*X+3*Y-2
0=2*X^2+5*X*Y-3*Y^2-3*X+(-1)*Y-2
0=2*X^2+5*X*Y-3*Y^2-3*X+(-5)*Y-2
0=2*X^2+5*X*Y-3*Y^2-3*X+(-11)*Y-2
0=2*X^2+5*X*Y-3*Y^2-3*X+(-12.5)*Y-2
0=2*X^2+5*X*Y-3*Y^2-3*X+(-14)*Y-2
0=2*X^2+5*X*Y-3*Y^2-3*X+(-16)*Y-2
0=2*X^2+5*X*Y-3*Y^2-3*X+(-20)*Y-2
0=2*X^2+5*X*Y-3*Y^2-3*X+(-24)*Y-2
0=2*X^2+5*X*Y-3*Y^2-3*X+(-24)*Y-2
Ax=-25
Bx=25
Ay=-25
Відмічено об'єктів:15
Відповіді

Рис. 8

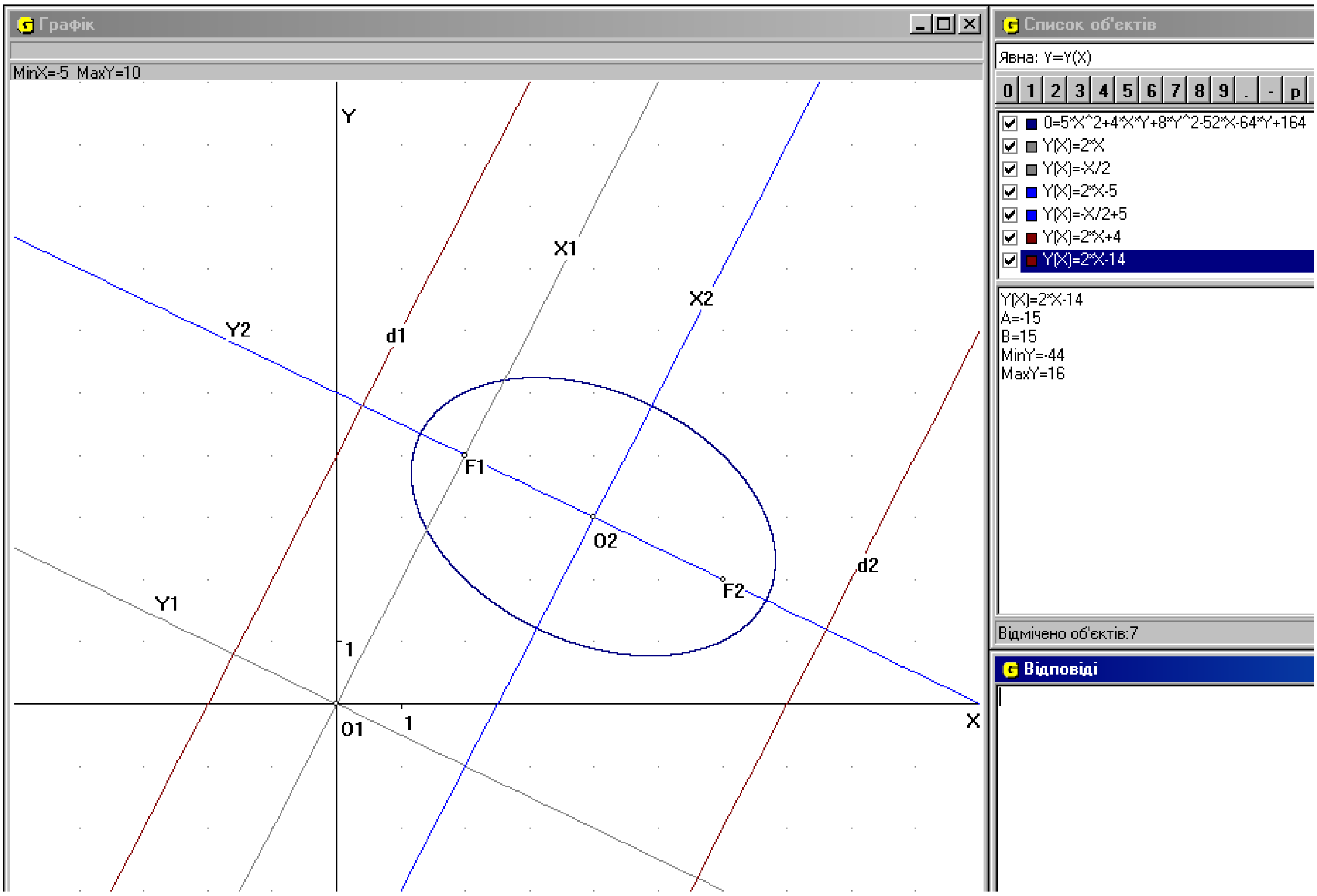

Рис. 9

Підставимо ці вирази для x та y в дане рівняння і виділимо коефіцієнти при x_1^2, y_1^2 та x_1y_1. Отримаємо:

$$
\begin{gathered}
(5\cos^2\alpha + 4\cos\alpha\sin\alpha + 8\sin^2\alpha)x_1^2 + (5\sin^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha + 8\cos^2\alpha)y_1^2 + \\
+(2\sin^2\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha)x_1y_1 - (52\cos\alpha + 64\sin\alpha)x_1 + \\
+(52\sin\alpha - 64\cos\alpha)y_1 + 164 = 0.
\end{gathered} \tag{3}
$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнт при x_1y_1 та поділивши обидві частини на $\cos^2\alpha \neq 0$, одержимо $2\mathrm{tg}^2\alpha - 3\mathrm{tg}\alpha - 2 = 0$, звідки $(\mathrm{tg}\alpha)_1 = 2, \quad (\mathrm{tg}\alpha)_2 = -\frac{1}{2}$.

Знаючи $\mathrm{tg}\alpha$, можна знайти $\sin\alpha$ та $\cos\alpha$ за формулами:

$$
\sin\alpha = \pm\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} \tag{4}
$$

Якщо кут повороту α домовитися вважати гострим, то в цих формулах треба брати знак плюс і для $\mathrm{tg}\alpha$ взяти додатний розв'язок.

Вибираємо, наприклад кут повороту α такий, що $\mathrm{tg}\alpha = 2$. Знаходимо $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ та підставляємо їх в (3).

Після обчислення коефіцієнтів одержимо

$$9x_1^2 + 4y_1^2 - 36\sqrt{5}x_1 + 8\sqrt{5}y_1 + 164 = 0.$$

В отриманому рівнянні виділимо повні квадрати

$$9(x_1 - 2\sqrt{5})^2 + 4(y_1 + \sqrt{5})^2 = 36.$$

Виконаємо паралельне перенесення за формулами

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - 2\sqrt{5}, \\
y_2 &= y_1 + \sqrt{5}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Отже, в системі $O_2x_2y_2$ рівняння кривої має вигляд $\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{9} = 1$. Це еліпс, у якого півосі $a = 2,\ b = 3$.

Виразимо x_1 та y_1 із (5) та разом з $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ підставимо в (2). Одержимо формули перетворення координат:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} x_2 - \frac{2}{\sqrt{5}} y_2 + 4,$$
$$y = \frac{2}{\sqrt{5}} x_2 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_2 + 3 \qquad (6)$$

За формулами (6) знаходимо в системі Oxy центр еліпса $O_2(4;3)$, фокуси $F_1(2;4)$, $F_2(6;2)$. Користуючись послугою «Графік/Мітки…», позначаємо знайдені точки на графіку (рис. 9).

При повороті координатних осей xy на кут α $(tg_1\alpha = 2,\ \ tg_2\alpha = -\frac{1}{2})$ вісь абсцис переходить у пряму $y = 2x$, а вісь ординат – у пряму $y = -\frac{x}{2}$. В результаті паралельного перенесення координатні осі x_2y_2 в початковій системі координат xy зображуються графіками $y = 2x - 5$ та $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

Користуючись формулами (6), неважко знайти рівняння директрис, які в даній задачі набувають вигляду $d_1 : y = 2x + 4$ та $d_2 : y = 2x - 14$.

Щоб побудувати координатні системи x_1y_1 та x_2y_2, а також директриси еліпса в Gran1, створимо об'єкти типу «Явна» та у вікні «Введення виразу залежності» запишемо знайдені залежності для цих прямих (Рис. 9).

Таким чином, під час вивчення курсу аналітичної геометрії доцільно використовувати ППЗ Gran1, оскільки це надає навчальній діяльності дослідницького, пошукового характеру, формує пізнавальні можливості, унаочнює розв'язування задач. Графічне дослідження загального рівняння кривих другого порядку сприяє кращому засвоєнню і осмисленню теоретичного матеріалу, надає можливість перевірити остаточні відповіді.

Література

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979. – 512 с.
2. Акопян А.В., Заславский А.А. Геометрические свойства кривых второго порядка. – М.: МЦНМО, 2007. – 136 с.
3. Жалдак М.І., Горошко Ю.В, Вінниченко Є.Ф. Математика з комп'ютером: Посібник для вчителів. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. – 282 с.
4. Ильин В.А., Позняк Є.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1999. – 224 с.
5. Канатников А.Н. Крищенко А.П. Аналитическая геометрия. – М.: Изд. МГТУ им. Баумана, 2000. – 387 с.
6. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – Спб.: Лань, 2003. – 336 с.