**Михалін Г.О.**
доктор педагогічних наук, професор
**Деканов С.Я.**
кандидат фізико-математичних наук, доцент
НПУ імені М.П. Драгоманова

**Вивчення основних елементарних функцій дійсної і комплексної змінної з використанням комп'ютерних засобів математики**

**1. Вступ.** *Основними елементарними функціями* найчастіше вважають сталу, степеневу, показникову, логарифмічну, тригонометричні та обернені тригонометричні функції. Ці функції є нібито цеглинками, за допомогою яких будують переважну кількість числових функцій як дійсної, так і комплексної змінної, що відіграють у математиці та її застосуваннях найважливішу роль. Зокрема з основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій і операцій суперпозиції функцій утворюються усі так звані *елементарні функції.*

У шкільному курсі математики основні елементарні та елементарні функції також відіграють важливу роль. Тому учителеві математики бажано мати ґрунтовні знання щодо основних елементарних функцій, причому не тільки дійсної, а й комплексної змінної. Справа у тому, що саме для комплексної змінної стають зрозумілими відповіді на питання стосовно деяких властивостей основних елементарних функцій. Наприклад:

- Чому функція $f(x)=\operatorname{arctg} x$ має похідні будь-якого порядку на проміжку $(-\infty;+\infty)$, проте її подання за допомогою степеневого ряду за степенями $x$ збігається лише на проміжку $(-1;1]$?
- Чи насправді логарифми від'ємних чисел не існують?
- Чи насправді синус не може набувати значень, більших за 1 або менших за $-1$?
- Як пов'язані між собою числа $e$ та $\pi$?

Розглянемо деякий нетрадиційний підхід до означень основних елементарних функцій та дослідженню їх найважливіших властивостей з використанням комп'ютерних засобів математики.

**2. Поняття експоненти дійсного числа.** Традиційно експонентою дійсного числа називають степінь $e^x$, де число $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, причому остання рівність є означенням числа $e$, яке вводять після доведення того, що послідовність $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$, є монотонною і обмеженою, а тому й збіжною.

Разом з тим цілком аналогічно легко довести, що *для довільного числа* $x\in(-\infty;+\infty)$ *послідовність* $x_n=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$, *є неспадною і обмеженою, коли* $n\ge n_0=n_0(x)$, *а тому існує скінченна границя* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, яку позначають $\exp x$ і називають *експонентою дійсного числа* $x$. Наведемо це доведення.

Зафіксуємо число $x$ і виберемо число $n_0=n_0(x)\in\mathbb{N}$ настільки великим, щоб $n>|x|$, а тому $\forall n\ge n_0$ $\dfrac{x}{n}>-1$ і $\dfrac{-x}{(n+1)(n+x)}>-1$.

Тоді для вказаних номерів $n\ge n_0$ можна знайти відношення

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n}=\frac{\left(1+\dfrac{x}{n}+\left(\dfrac{x}{n+1}-\dfrac{x}{n}\right)\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n+1}}\cdot\frac{n+x}{n}=\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}\frac{n+x}{n}.$$

Скориставшись відомою нерівністю Бернуллі: $(1+\alpha)^n\ge 1+n\alpha$, яка є правильною для всіх $\forall\alpha>-1$ і всіх $n\in\mathbb{N}$, дістанемо

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}\ge\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\cdot(n+1)\right)\cdot\frac{n+x}{n}=\frac{n}{n+x}\cdot\frac{n+x}{n}=1,$$

тобто $x_{n+1}\ge x_n$ $\forall n\ge n_0=n_0(x)$.

Тепер легко довести обмеженість послідовності $x_n=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ $\forall n\ge n_0$. Справді, якщо $x>0$, а

$n \ge n_0$, то $n > |x|$ і тому

$$0 < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n-x}\right)^n = \left(\frac{n}{n-x}\right)^n = \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{-x}{n}\right)^n}.$$

Останній знаменник є неспадним, коли $n \ge n_0$, а тому найбільшого значення для номерів $n \ge n_0$ останній дріб набуває, коли $n = n_0$. Отже,

$$0 < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le \left(1-\frac{x}{n_0}\right)^{-n_0} = H \quad \forall n \ge n_0.$$

Цим доведено обмеженість послідовності $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, коли $x > 0$. Якщо $x < 0$, то

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{|x|}{n}\right)^n \in (0;1), \text{ коли } n \ge n_0,$$

а якщо $x = 0$, то $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 \ \forall n$.

Таким чином, послідовність $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ для $n \ge n_0$ і довільного дійсного числа $x$ є неспадною і обмеженою, а тому збіжною. Границю цієї послідовності називають *експонентою дійсного числа* $x$ і позначають $\exp x$.

Порівнюючи наведене доведення з будь-яким традиційним доведенням монотонності і обмеженості послідовності $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, легко бачити, що воно не є складнішим, (див., наприклад, [1, С. 44-46], [2, С. 68-69], [3, С. 116-118]). При цьому дістаємо означення не тільки числа $e$, а й експоненти дійсного числа $x$, а це при традиційному підході вимагає попереднього вивчення поняття степеня з довільним дійсним показником.

Використовуючи збіжність послідовності $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ $\forall x \in \mathbb{R}$, можна довести, що для будь якого комплексного числа $z$ існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, яку природно назвати *експонентою комплексного числа* $z$ і позначити $\exp z$.

Отже, за означенням

$$\exp z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

При цьому сутність останньої рівності полягає у тому, що *наближеним значенням* $\exp z$ *є число* $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, *тобто* $\exp z \approx \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, *причому абсолютну похибку останнього наближення можна зробити як завгодно малою за рахунок добору досить великого числа* $n$.

Використовуючи рівність (1), можна ввести функцію $f(z) = \exp z$, яку також називають *експонентою* або *експоненціальною функцією.* Якщо в (1) покласти $z = 1$, то дістанемо означення числа $e$:

$$e = \exp 1 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{2}$$

Таким чином, $e \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, причому абсолютну похибку цього наближення можна зробити як завгодно малою за рахунок добору досить великого числа $n$. Наприклад, щоб дістати десяткове зображення числа $e$ з точністю до $10^{-1}$, досить взяти $n = 13$.

Разом з тим за допомогою комп'ютера можна знайти десяткове зображення числа $e$ з точністю до $10^{-15}$: $e \approx 2.718281828459045$, проте для цього зручніше замість (2) використовувати іншу формулу.

**3. Формула для наближеного обчислення $\exp z$.** Якщо $z$ – довільне фіксоване число (дійсне або комплексне), то за формулою бінома Ньютона маємо:

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = 1+z+\frac{n(n-1)}{2}\frac{z^2}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{z^3}{n^3}+\ldots+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}\frac{z^m}{n^m}+$$

$$+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m)}{(m+1)!}\frac{z^{m+1}}{n^{m+1}}+\ldots+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n!}\frac{z^n}{n} = X_n(m,z)+Y_n(m,z), \tag{3}$$

де $m\in\mathbb{N}$ – довільне фіксоване,

$$X_n(m,z)=1+z+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{z^3}{3!}+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\frac{z^m}{m!}\to$$

$$\to 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^m}{m!}=\sum_{k=0}^{m}\frac{z^k}{k!}, \text{ коли } n\to\infty,$$

а

$$Y_n(m,z)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{m}{n}\right)\frac{z^{m+1}}{(m+1)!}+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{z^n}{n!}.$$

Вважаючи $|z|\le m+1$, дістанемо

$$|Y_n(m,z)|\le\frac{|z|^{m+1}}{(m+1)!}\left(1+\frac{|z|}{m+2}+\frac{|z|^2}{(m+2)^2}+\ldots+\frac{|z|^{n-m-1}}{(m+2)^{n-m-1}}\right)\le$$

$$\le\frac{|z|^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1}{1-\frac{|z|}{m+2}}=\frac{|z|^{m+1}}{m!}\cdot\frac{m+2}{(m+1)(m+2-|z|)}\le\frac{|z|^{m+1}}{m!\cdot m}\cdot\frac{m+1}{m+2-|z|}.$$

Легко бачити, що коли $|z|\le 1$, то $\frac{m+1}{m+2-|z|}\le 1$, а коли $1<|z|\le m+1$, то $\frac{m+1}{m+2-|z|}\le|z|$. Тому $\frac{m+1}{m+2-|z|}\le H(z)=\max\{1,|z|\}$, коли $|z|\le m+1$. Таким чином, якщо $|z|\le m+1$, то $|Y_n(m,z)|\le\frac{|z|^{m+1}}{m!}\cdot\frac{H(z)}{m}$.

Оскільки $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=X_n(m,z)+Y_n(m,z)$ і послідовності $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ та $X_n(m,z)$ мають скінченні границі, коли $n\to\infty$, то й послідовність $Y_n(m,z)$ має скінченну границю, коли $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}Y_n(m,z)=r_m(z).$$

Тому, якщо у рівності (3) спрямувати $n$ до $\infty$, дістанемо:

$$\exp z=\sum_{k=0}^{m}\frac{z^k}{k!}+r_m(z), \text{ де } |r_m(z)|\le\frac{|z|^{m+1}}{m!}\cdot\frac{\max\{1,|z|\}}{m}, \text{ якщо } |z|\le m+1. \tag{4}$$

Легко переконатися, що коли $R>0$ – фіксоване число, то $\forall z\in\{z\in\mathbb{C}:|z|\le R\}$

$$|r_m(z)|\le\frac{|z|^{m+1}}{m!}\cdot\frac{H_1(R)}{m}\le\frac{R^{m+1}}{m!}\cdot\frac{H_1(R)}{m}\to 0, \text{ коли } m\to\infty, \text{ де } H_1(R)=\max\{1,R\}.$$

Це означає, що $\forall z\in C$

$$\exp z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^m}{m!}+\ldots, \tag{5}$$

або $\exp z\approx\sum_{k=0}^{m}\frac{z^k}{k!}$ $\forall m\in\mathbb{N}$. При цьому абсолютна похибка останнього наближення дорівнює $|r_m(z)|$ і $|r_m(z)|\le\frac{R^{m+1}}{m!}\cdot\frac{H_1(R)}{m}$, коли $|z|\le R$.

Зокрема, для $m=1$ дістаємо:

$$\exp z=1+z+r_1(z), \text{ де } |r_1(z)|\le|z|^2 \text{ та } |z|\le R. \tag{6}$$

З рівності (6) випливає, що $\exp z\to\exp 0=1$, коли $z\to 0$, тобто функція $f(z)=\exp z$ неперервна у точці $z_0=0$, а $\frac{\exp z-1}{z}\to 1=\exp 0$, коли $z\to 0$, тобто функція $f(z)=\exp z$ диференційовна у точці $z_0=0$, причому $f'(0)=f(0)=1$.

З рівностей (5) і (4) дістаємо формули для подання числа $e$ у вигляді десяткового дробу з будь-якою точністю:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{m!} + \ldots \quad \text{та} \quad e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{m!} + r_m(1), \text{ де } \frac{1}{(m+1)!} < r_m(1) < \frac{1}{m! \cdot m}. \qquad (7)$$

Використовуючи цю формулу, можна одержати, що

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{17!} + \Delta = 2.718281828459045 + \Delta^*, \text{ де } 0 < \Delta^* < 10^{-15}.$$

На сьогодні існує досить багато систем комп’ютерної алгебри, за допомогою яких можна за лічені секунди проводити обчислення з дуже великою точністю, порядок якої може сягати $10^{-10^5}$ і навіть більше, залежно від характеристик комп’ютера. Покажемо, для прикладу, як обчислити число $e$ з точністю до $10^{-500}$ (тобто з 500 правильними цифрами після коми) в системах Derive6 і Maxima5.20.

У програмі Derive кількість правильних цифр задається глобальними змінними PrecisionDigits (кількість точних цифр) і NotationDigits (кількість цифр у записі дійсних чисел). Цим змінним можна надати потрібні значення як із рядка введення, так і через меню <u>O</u>ptions, <u>M</u>ode Settings…, Simplification, Precision, Digits. У нашому випадку потрібно ввести у <u>поле</u> Digits: 501. Після цього вводимо число $e$, набравши в командному рядку #e, і натискуємо кнопку $\boxed{\approx}$. У результаті дістанемо:

2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759
4571382178525166427427466391932003059921817413596629043572900334295260595630738132328627
9434907632338298807531952510190115738341879307021540891499348841675092447614606680822648001684774118537423454424371075390777449920695517027618386062613313845830007520449338265602976067371132007093287091274437470472306969772093101416928368190255151086574637721112523897844250569536967707854499699679468644549059879316368892300987931 2

Аналогічно в системі Maxima спочатку треба задати бажану точність обчислення дійсних чисел, надавши глобальній змінній fpprec (кількість точних цифр) відповідного значення, а потім виконати самé обчислення конкретного числа $x$ із заданою точністю за командою bigfloat(x). Для того, щоб на екрані були відображені усі цифри числа, причому з перенесеннями на новий рядок, налаштуємо спосіб відображення виразів у вигляді ascii у меню Maxima. Після цього задамо точність командою fpprec:501 і обчислимо число $e$ з даною точністю за командою bigfloat(%e).

2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759
4571382178525166427427466391932003059921817413596629043572900334295260595630738132328627
9434907632338298807531952510190115738341879307021540891499348841675092447614606680822648001684774118537423454424371075390777449920695517027618386062613313845830007520449338265602976067371132007093287091274437470472306969772093101416928368190255151086574637721112523897844250569536967707854499699679468644549059879316368892300987931 3b0

За допомогою комп’ютера також можна дослідити точність наближення числа $e$ послідовністю $x_n = (1 + 1/n)^n$, обчислюючи різницю $e - x_n$ при все більших і більших $n$. Виявляється, що можливості використання системи Maxima при виконанні цієї операції вичерпуються після номера $n = 10^6$ (знайдена точність – до $1,4 \cdot 10^{-6}$, а час обчислень ≈15 с.). Разом з тим за програмою Derive при виставленні точності 200 знаків миттєво обчислюється похибка $e - x_{10^{100}} \approx 1,4 \cdot 10^{-100}$, яка повинна свідчити, що в числі $x_{10^{100}}$ міститься щонайменше 99 правильних цифр числа $e$. І справді, якщо встановити кількість цифр у записі чисел NotationDigits:=100 і наближено обчислити $x_{10^{100}}$, то результат, отриманий за допомогою програми Derive буде таким:

2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759
4571382178525166427

(тобто всі виведені цифри числа $x_{10^{100}}$ такі самі, як і в числі $e$).

Якщо ж позначити $y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ і досліджувати похибку $e - y_n$, то за допомогою як Maxima, так і Derive при встановленій точності обчислень у 200 знаків отримуємо, що похибка порядку $10^{-100}$ досягається вже при $n = 69$. Для перевірки цього факту виведемо, наприклад, за допомогою Maxima, число $y_{69}$ при точності обчислень fpprec:200 і кількості відображуваних цифр fpprintprec:100:

2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759
4571382178525166427

Таким чином, за допомогою комп'ютера з'ясовується, що числа $x_{10^{100}}$ та $y_{69}$ містять по 100 правильних цифр числа $e$. Разом з тим обчислення $y_n$ з великими номерами, наприклад при $n > 1000$, за допомогою комп'ютера починають виконуватися нескінченно довго. Виявляється, що можна скласти програму, за допомогою якої можна досить швидко обчислювати $y_n$, якщо задати цю послідовність рекурентно: $y_0 = 1$, $a_0 = 1$, $y_n = y_{n-1} + a_{n-1} / n$. Відповідний алгоритм обчислення числа $y_n$ (з мінімальним номером), яке має у своєму десятковому зображенні $p$ правильних цифр числа $e$ після коми, легко реалізувати у середовищі Maxima:

```
[a:1,y:1,p:500,fpprec:p+1,d:10^(-p)]$
for k:1 step 1 while abs(%e-y)>d do [a:a/k,y:y+a,n:k]$
y:bfloat(y)$display(y)$display(n);
```

При використанні цієї програми потрібно тільки вказати у першому рядку параметр `p`. В результаті на екран буде виведено число $y_n$ та його номер. Даний алгоритм значно ефективніший, ніж команда y(n):=sum(1/k!,k,0,n). За його допомогою за кілька секунд можна наблизити число $e$ за допомогою $y_n$ з точністю до $10^{-1001}$ і з'ясувати, що найменший номер, який для цього потрібен, це $n = 449$.

**4. Доведення ірраціональності числа $e$.** Припустимо, що число $e$ раціональне, тобто $e = \dfrac{p}{q}$, де $p$ і $q$ – фіксовані натуральні числа. Тоді, якщо в рівності (7) покласти $m = q+1$, то дістанемо:

$$\frac{p}{q} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(q+1)!} + r_{q+1}(1),$$

де $\dfrac{1}{(q+2)!} < r_{q+1}(1) < \dfrac{1}{(q+1)! \cdot (q+1)}$. Домножимо обидві частини останньої рівності на $(q+1)!$ і дістанемо:

$$p(q+1)\cdot(q-1)! = 2(q+1)! + \frac{(q+1)!}{2!} + \frac{(q+1)!}{3!} + \ldots + \frac{(q+1)!}{(q+1)!} + (q+1)!\, r_{q+1}(1),$$

де $\dfrac{1}{q+2} = \dfrac{(q+1)!}{(q+2)!} < (q+1)!\, r_{q+1}(1) < \dfrac{1}{q+1}$, тобто натуральне число $p(q+1)\cdot(q-1)!$ є сумою натурального числа $2(q+1)! + \dfrac{(q+1)!}{2!} + \dfrac{(q+1)!}{3!} + \ldots + \dfrac{(q+1)!}{(q+1)!}$ і дробового числа $(q+1)!\, r_{q+1}(1) \in \left[\dfrac{1}{q+2}; \dfrac{1}{q+1}\right] \subset (0;1)$, що неможливо. Тому припущення про раціональність числа $e$ є неправильним, а отже, ***число $e$ є ірраціональним,*** тобто його подання є нескінченним неперіодичним десятковим дробом.

**5. Основні властивості експоненціальної функції.** Серед усіх властивостей експоненціальної функції виділяють наступні три.

**Властивість 1** (про значення в одиниці). $\exp 1 = e$.

Властивість 1 випливає з означення експоненти та числа $e$.

**Властивість 2** (про границю в нулі). $\exp z \to 1$, *коли* $z \to 0$.

Властивість 2 доведена у пункті 3.

**Властивість 3** (про експоненту суми). $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Для доведення властивості 3 корисно зауважити, що

$$\left(1 + \frac{\alpha_n}{n}\right)^n \to 1, \text{ коли } \alpha_n \to 0 \text{ і } n \to \infty. \tag{8}$$

Справді,

$$\left|\left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)^n - 1\right| = \left|\left(1+\frac{\alpha_n}{n} - 1\right)\left(\left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)^{n-1} + \left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)^{n-2} + \ldots + 1\right)\right| \le \frac{|\alpha_n|}{n} \cdot n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 0 \ (n \to \infty),$$

оскільки $|\alpha_n| \le 1 \ \forall n \ge n_0$ і $\alpha_n \to 0$, коли $n \to \infty$.

Розглянемо тепер добуток

$$\left(1+\frac{z_1}{n}\right)^n \left(1+\frac{z_2}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{z_1+z_2}{n} + \frac{z_1 z_2}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{z_1+z_2}{n}\right)^n \left(1 + \frac{z_1 z_2}{n(n+z_1+z_2)}\right)^n =$$

$$= \left(1+\frac{z_1+z_2}{n}\right)^n \left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)^n,$$

де $\alpha_n = \dfrac{z_1 z_2}{n + z_1 + z_2} \to 0$ при $n \to \infty$ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Звідси й випливає властивість 3.

**6. Інші властивості експоненціальної функції.** Властивості 1 – 3 називають *основними* або *характеристичними властивостями експоненти,* оскільки з них випливають усі інші властивості експоненти. Продемонструємо це для деяких властивостей.

Оскільки $e = \exp(1+0) = \exp 1 \exp 0 = e \exp 0$, то $\exp 0 = \dfrac{e}{e} = 1$.

Цим доведено **властивість 4** (про значення експоненти в нулі). $\exp 0 = 1$.

Визначимо знак $\exp x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Оскільки $\exp x = \exp\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = \left(\exp\dfrac{x}{2}\right)^2 \ge 0$, то $\exp x \ge 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Далі, $\exp 0 = 1 = \exp(z + (-z)) = \exp z \exp(-z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Звідси випливає, що $\exp z \ne 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$, а оскільки $\exp x \ge 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, то $\exp x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ і $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Цим доведено **властивість 5** (про порівняння експоненти з нулем і про експоненту взаємно протилежних чисел): $\exp z \ne 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ *і* $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Оскільки $\exp(z_1 - z_2) = \exp(z_1)\exp(-z_2) = \exp(z_1)/\exp(z_2)$, то правильне наступне твердження (**наслідок** про експоненту різниці двох чисел):

$$\exp(z_1 - z_2) = \frac{\exp z_1}{\exp z_2}.$$

З властивостей 2 і 4 випливає, що $\exp z \to \exp 0 = 1$, коли $z \to 0$, тобто $\exp z$ неперервна в точці $z_0 = 0$. Візьмемо довільну точку $z_0 \in \mathbb{C}$. Тоді $\exp z - \exp z_0 = \exp z_0(\exp(z - z_0) - 1) \to 0$, коли $z \to z_0$. Отже, $\exp z \to \exp z_0$, коли $z \to z_0$.

Цим доведено **властивість 6** (про неперервність експоненти): $\exp z \to \exp z_0$ $(z \to z_0)$ $\forall z_0 \in \mathbb{C}$, *тобто експоненціальна функція неперервна на множині* $\mathbb{C}$ *комплексних чисел.*

Розкриємо тепер зв'язок між $\exp x$ та $e^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

За принципом математичної індукції легко дістати, що $\exp n = (\exp 1)^n = e^n$. Звідси випливає, що $\exp(-n) = e^{-n}$, а $\exp 1 = e = \exp\left(n \cdot \dfrac{1}{n}\right) = \left(\exp\dfrac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \exp\dfrac{1}{n} = e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$ і тому

$$\exp\frac{m}{n} = \exp\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(\exp\frac{1}{n}\right)^m = e^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{e^m}.$$

Для довільного дійсного числа $x$ існує послідовність раціональних чисел $r_n \to x$, $n \to \infty$. Тому $\exp r_n = e^{r_n} \to \exp x$, $n \to \infty$, а границю послідовності $e^{r_n}$, коли $n \to \infty$, а $r_n \to x$, називають степенем $e^x$. Отже, $e^x = \exp x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Цим доведено **властивість 7** (про зв'язок експоненти із степенем): $\exp x = e^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

З властивості 7 і властивостей кореня та степеня з натуральним показником випливає, що коли $r \in \mathbb{Q}$, то $e^r > 1 \Leftrightarrow r > 0$. Звідси, враховуючи неперервність експоненти, дістанемо.

**Наслідок** (про розв'язок нерівності $\exp x > 1$): $\exp x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Візьмемо довільні дійсні числа $x_1$ та $x_2$ такі, що $x_1 < x_2$. Тоді $x_2 - x_1 > 0$ і тому

$$1 < \exp(x_2 - x_1) = \frac{\exp x_2}{\exp x_1} \Rightarrow \exp x_2 > \exp x_1.$$

Отже доведено **властивість 8** (про монотонність експоненти): *Якщо* $x_1 < x_2$, *то* $\exp x_1 < \exp x_2$, *тобто експоненціальна функція є зростаючою на множині* $\mathbb{R}$ *дійсних чисел.*

Оскільки $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists n = n(x) \in \mathbb{Z}$: $n \le x < n+1$, то ($x \to +\infty \Leftrightarrow n = n(x) \to +\infty$), а ($x \to -\infty \Leftrightarrow n \to -\infty$). Звідси випливає, що $e^x \ge e^{n(x)} \to +\infty$, коли $x \to +\infty$, та $0 \le e^x < e^{n+1} = \dfrac{1}{e^{-n-1}} \to 0$, коли $x \to -\infty$.

Таким чином $0 = \inf\limits_{x \in R} \exp x$, $+\infty = \sup\limits_{x \in R} \exp x$. Оскільки $\exp x$ неперервна на $\mathbb{R}$, то за теоремою Больцано-Коші про проміжні значення неперервної функції множиною значень експоненти є проміжок $(0; +\infty)$.

Враховуючи зростання експоненти, дістанемо, що $\forall a > 0$ $\exists b \in \mathbb{R}$: $\exp b = a$. Це число $b$

називають *логарифмом натуральним числа* $a$ і позначають $b=\ln a$.

Отже доведено **властивість 9** (про множину значень експоненти та розв'язки рівняння $\exp x=a$): *Множиною значень експоненціальної функції дійсної змінної є проміжок* $(0;+\infty)$. *При цьому для кожного числа* $a>0$ *існує єдиний дійсний розв'язок рівняння* $\exp x=a$, *яким є логарифм натуральний числа* $a$, *тобто*

$$x\in\mathbb{R}\ \ i\ \exp x=a \iff x=\ln a.$$

З властивості 9 випливає, що функція $f(x)=\ln x$, $x\in(0;+\infty)$, є оберненою до експоненціальної функції дійсної змінної. Тому за теоремою про монотонність і неперервність оберненої функції дістаємо.

**Наслідок** (про зростання та неперервність логарифма натурального): *Якщо* $0<x_1<x_2$, *то* $\ln x_1<\ln x_2$, *а якщо* $x\to x_0>0$, *то* $\ln x\to\ln x_0$.

Розкриємо зв'язок експоненти з косинусом та синусом.

Зафіксуємо довільне $z=x+iy$. Тоді згідно з властивостями 3 та 7

$$\exp z=\exp(x+iy)=\exp x\exp iy=e^x\exp iy.$$

За означенням експоненти $\exp iy=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{iy}{n}\right)^n$. Тому

$$|\exp iy|=\left|\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{iy}{n}\right)\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{iy}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)^n}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)^n}=1,$$

оскільки $\alpha_n=\frac{y^2}{n}\to 0$ і правильне співвідношення (8).

Отже, число $\exp iy=\operatorname{Re}\exp iy+i\operatorname{Im}\exp iy=a(y)+ib(y)$ лежить на одиничному колі комплексної площини, тобто на колі з центром у точці $z_0=0$ і радіусом $R=1$. Для кожної такої точки $\exp iy=a(y)+ib(y)$ її дійсна частина (тобто абсциса) є косинусом, а уявна частина (тобто ордината) – синусом кута, що його утворює радіус-вектор цієї точки з додатним напрямком дійсної осі. При цьому цей кут дорівнює $y+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Отже,

$$\exp iy=\cos y+i\sin y\ \ \forall y\in\mathbb{R},\ \text{ а }\ \exp z=\exp(x+iy)=e^x(\cos y+i\sin y)\ \ \forall z\in\mathbb{C}.$$

Оскільки $\exp(-iy)=\cos y-i\sin y$, то

$$\cos y=\frac{1}{2}\big(\exp iy+\exp(-iy)\big),\ \ \sin y=\frac{1}{2i}\big(\exp iy-\exp(-iy)\big).$$

Таким чином доведено **властивість 10** (про зв'язок експоненти з синусом та косинусом): *Для довільного комплексного числа* $z=x+iy$

$$\exp z=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{9}$$

*При цьому* $|\exp z|=e^x$, $\operatorname{Arg}\exp iz=y+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$,

$$\cos y=\frac{1}{2}\big(\exp iy+\exp(-iy)\big),\ \ \sin y=\frac{1}{2i}\big(\exp iy-\exp(-iy)\big)\ \ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Розглянемо питання щодо множини значень $\exp z$, коли $z\in\mathbb{C}$.

Зафіксуємо довільне число $z=|z|(\cos\arg z+i\sin\arg z)\neq 0$ і розв'яжемо рівняння $\exp w=z$:

$$\exp w=z \iff \exp(u+iv)=|z|(\cos\arg z+i\sin\arg z) \iff$$

$$\iff e^u(\cos v+i\sin v)=|z|(\cos\arg z+i\sin\arg z) \iff$$

$$\iff \begin{cases} e^u=|z|,\\ v=\arg z+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \iff \begin{cases} u=\ln|z|,\\ v=\arg z+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \iff w=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

Таким чином, рівняння $\exp w=z$ з відомим $z\neq 0$ має зчисленну кількість розв'язків

$$w=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),\ \ k\in\mathbb{Z}. \tag{10}$$

Цим доведено **властивість 11** (про множину значень експоненціальної функції та розв'язки рівняння $\exp w=z$): *Множиною значень експоненціальної функції комплексної змінної є множина* $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. *При цьому для довільного фіксованого числа* $z\neq 0$ *рівняння* $\exp w=z$ *має зчисленну кількість розв'язків, що мають вигляд* (10).

Праву частину рівності (10) позначають $\operatorname{Ln} z$. Отже, $\exp w=z \iff w=\operatorname{Ln} z\ \ \forall z\neq 0$. Серед усіх розв'язків рівняння $\exp w=z$ виділяють той, що відповідає $k=0$, його називають *логарифмом натуральним комплексного числа* $z$ і позначають $\ln z$. Отже,

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z\ \ \forall z\neq 0, \tag{11}$$

що дозволяє ввести функцію $w=f(z)=\ln z$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, яку називають *логарифмічною функцією* *комплексної змінної.* Вона є оберненою до експоненціальної функції $z = \exp w$ за умови, що $\operatorname{Re} w \in \mathbb{R}$, а $\operatorname{Im} w \in (-\pi; \pi]$. *Множиною значень* $f(z) = \ln z$ є смуга

$$E(f) = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \in (-\infty; +\infty),\ \operatorname{Im} w \in (-\pi; \pi]\}.$$

З рівності (11) зокрема випливає, що *логарифми від'ємних чисел існують, проте є числами уявними.*

З властивостей 3 та 10 легко дістати ще одну **властивість 12** (про періодичність експоненціальної функції комплексної змінної).

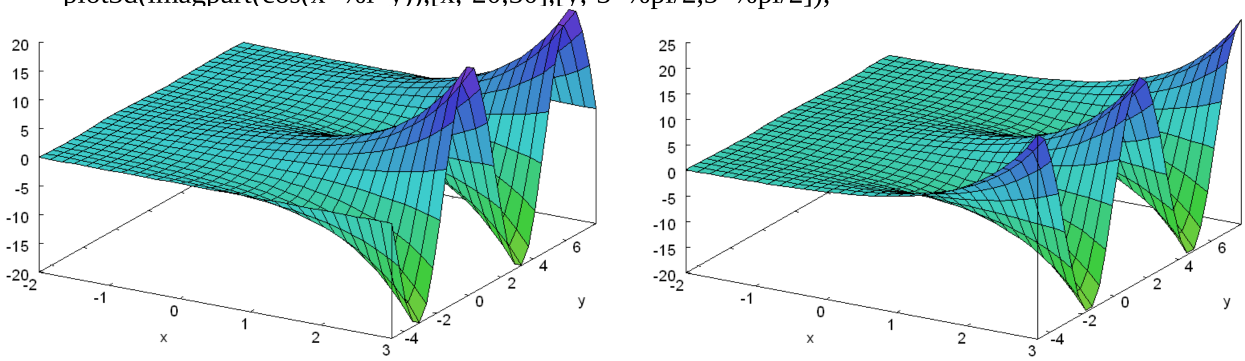
$$\exp(z + 2k\pi i) = \exp z \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

*тобто експоненціальна функція є періодичною із суто уявним основним періодом* $T = 2\pi i$.

В сучасних системах комп'ютерної математики передбачено операції з комплексними числами та функціями комплексної змінної. Наприклад, у системі Maxima є функції відшукання модуля abs(expr) і аргументу carg(expr) комплексного виразу expr, його дійсної realpart(expr) та уявної imagpart(expr) частин, а також подання його в алгебраїчній формі: rectform(expr) та інші.

Наприклад, за командою rectform(exp(x+%i*y)); видається такий результат: $ie^x \sin y + e^x \cos y$. А графіки (рис. 1) функцій $z = \operatorname{Re}\exp(x+iy)$ та $z = \operatorname{Im}\exp(x+iy)$ будуються за командами

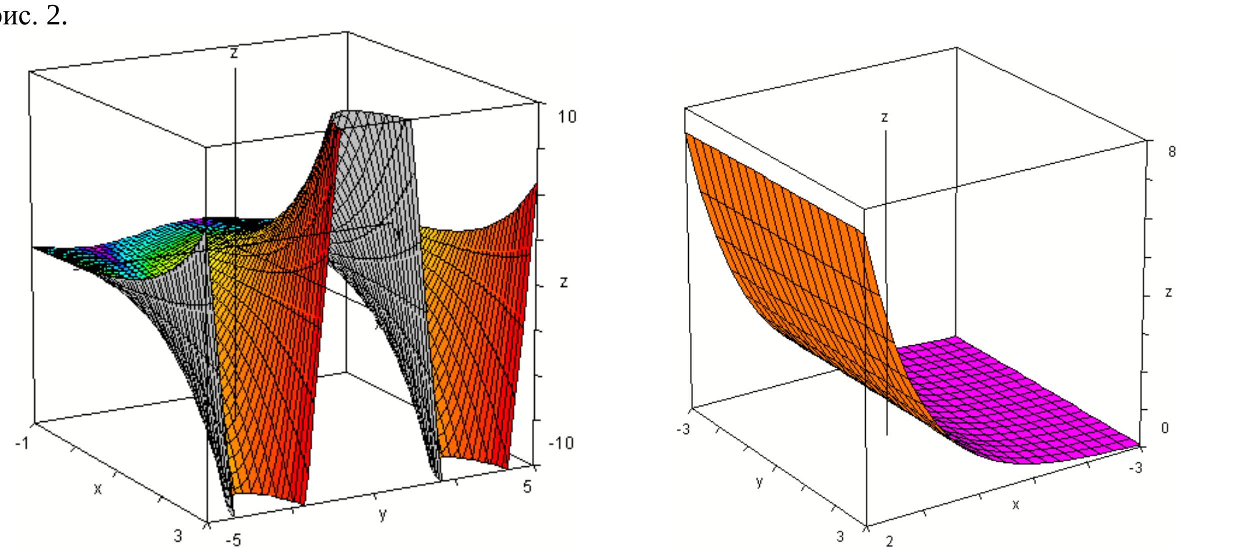
```
plot3d(realpart(cos(x+%i*y)),[x,-20,30],[y,-3*%pi/2,5*%pi/2]);
plot3d(imagpart(cos(x+%i*y)),[x,-20,30],[y,-3*%pi/2,5*%pi/2]);
```




$\operatorname{Re}\exp(x+iy)$ $\quad$ $\operatorname{Im}\exp(x+iy)$

Рис. 1

У програмі Derive також є функції для роботи з комплексними числами: за командами re(expr), im(expr), abs(expr), phase(expr) знаходять дійсну та уявну частини, модуль чи аргумент комплексного виразу expr. Наприклад, для відшукання дійсної частини $\exp(x+iy)$ потрібно ввести re(exp(x+#i*y)) і натиснути $\boxed{=}$. За програмою видається $e^x \cos(y)$. Після цього можна побудувати тривимірний графік даного виразу, натиснувши кнопку . 3-вимірні графіки будуються у так званому 3D-вікні, у якому є багато налаштувань вигляду малюнка, таких як задання діапазонів зміни абсцис, ординат і аплікат; масштабів вздовж осей; типу системи координат (прямокутна, циліндрична, сферична). Крім того, можна змінювати розміри зображення, обертати його у різних напрямках, зафарбовувати різними способами тощо. Графіки функцій $\operatorname{Re}\exp(x+iy)$ та $|\exp(x+iy)|$, створені за програмою Derive, подані на рис. 2.




$\operatorname{Re}\exp(x+iy)$ $\quad$ $|\exp(x+iy)|$

Рис. 2

Зобразимо також графік дійсної експоненціальної функції за допомогою програми Gran1, яка спеціально призначена для графічного аналізу функцій дійсної змінної.

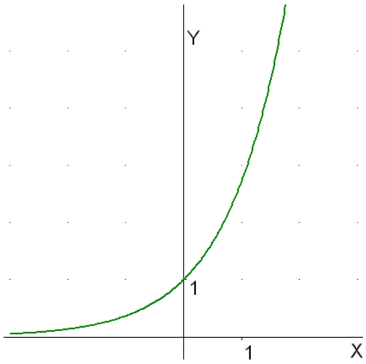


Рис. 3

**7. Неперервність логарифмічної функції.** За властивістю 6 $\exp z \to \exp z_0$, коли $z \to z_0$, а за наслідком з властивості 9 $\ln x \to \ln x_0$, коли $0 < x \to x_0$, $\forall x_0 > 0$. Виникає питання: чи є логарифмічна функція $f(z) = \ln z$ неперервною на своїй області визначення $D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, тобто чи прямує $\ln z$ до $\ln z_0$, коли $z$ прямує до $z_0$, для будь-якого $z_0 \neq 0$?

Легко бачити, що відповідь на це питання негативна.

Справді візьмемо довільне $z_0 = x_0 < 0$ і припустимо, що $z \to x_0$. Тоді $|z| \to |x_0|$ і якщо $\operatorname{Im} z > 0$, то $\arg z \to \pi$, а якщо $\operatorname{Im} z < 0$, то $\arg z \to -\pi$. Тому (Рис. 4)

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z \to \begin{cases} \ln|x_0| + i\pi, & \text{коли} \quad z \to x_0 \quad \text{і} \quad \operatorname{Im} z > 0, \\ \ln|x_0| - i\pi, & \text{коли} \quad z \to x_0 \quad \text{і} \quad \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

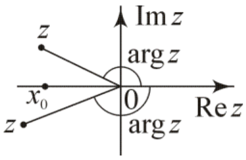


Рис. 4

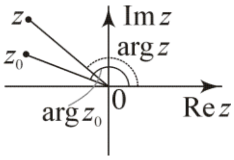


Рис. 5

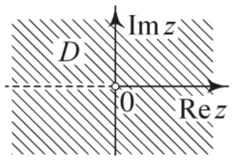


Рис. 6

Це означає, що у кожній точці $z_0 = x_0 < 0$ логарифмічна функція є розривною.

Разом з тим, якщо $z_0 \neq x_0 < 0$, то $z \to z_0 \iff |z| \to |z_0|$ і $\arg z \to \arg z_0$, а тому (рис. 5)

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z \to \ln|z_0| + i \arg z_0 = \ln z_0, \text{ коли } z \to z_0.$$

Отже, логарифмічна функція є неперервною в області (рис. 6)

$$D = \mathbb{C} \setminus \{z = x + i \cdot 0 : x \leq 0\}.$$

Таким чином, доведена наступна **властивість 13** (про неперервність логарифмічної функції): *Логарифмічна функція $f(z) = \ln z$ є неперервною в області $D = \mathbb{C} \setminus \{z = x + i \cdot 0 : x \leq 0\}$ і вона є розривною у кожній точці $z_0 = x_0 \leq 0$.*

Знайдемо дійсну та уявну частини функції $\ln z$ і зобразимо їх графіки за допомогою програми Maxima. За командами realpart(log(x+%i*y)) та imagpart(log(x+%i*y)) можна встановити, що

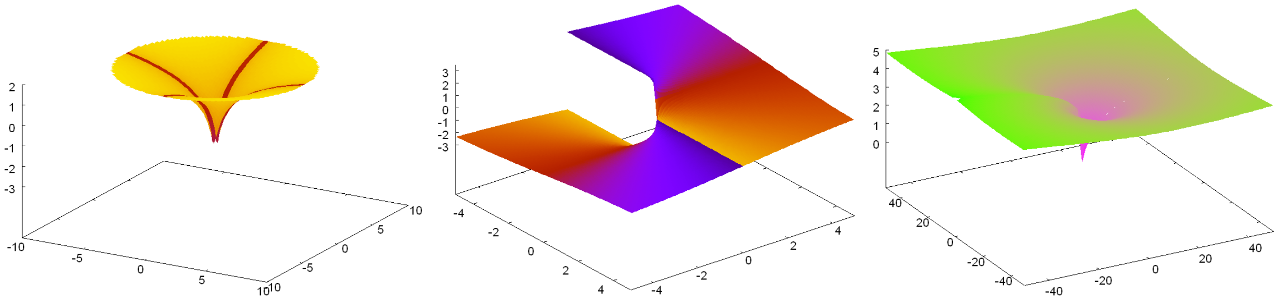
$$\operatorname{Re} \ln(x + iy) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \text{ а } \operatorname{Im} \ln(x + iy) = \operatorname{arctg}_2(y, x),$$

де $\operatorname{arctg}_2(y, x)$ – це те саме, що головний аргумент точки $z = x + iy$, тобто $\operatorname{arctg}_2(y, x) = \arg(x + iy) = \arg z$.

Для того щоб за допомогою програми Maxima якомога виразніше побудувати графіки функцій $\operatorname{Re} \ln z$, $\operatorname{Im} \ln z$ та $|\ln z|$, можна скористатися командами, наведеними у таблиці.

| $z = \operatorname{Re} \ln(x + iy)$ | $z = \operatorname{Im} \ln(x + iy)$ | $z = \lvert \ln(x + iy) \rvert$ |
|---|---|---|
| load(draw)$ draw3d(colorbox=false, enhanced3d=log(x^2*y^2), palette=color, nticks=50, xu_grid=100,yv_grid=100, surface_hide=true, explicit(realpart(log(x+%i*y)), x,-10,10,y,-10,10), zrange=[-3,2]); | load(draw)$ draw3d(colorbox=false, enhanced3d=atan(x/y),palette=color, xu_grid=100,yv_grid=100, explicit(imagpart(log(x+%i*y)), x,-5,5,y,-0.001,-5), explicit(imagpart(log(x+%i*y)), x,-5,5,y,0.001,5), yrange=[-5,5], zrange=[-3.5,3.5]); | load(draw)$ draw3d( colorbox=false,enhanced3d=true, palette=[-8,3,10], xu_grid=100,yv_grid=100, explicit(abs(log(x+%i*y)), x,-50,50,y,-0.1,-50), explicit(abs(log(x+%i*y)), x,-50,50, y,0.1,50), xrange=[-50,50], yrange=[-50,50],zrange=[0,5]); |

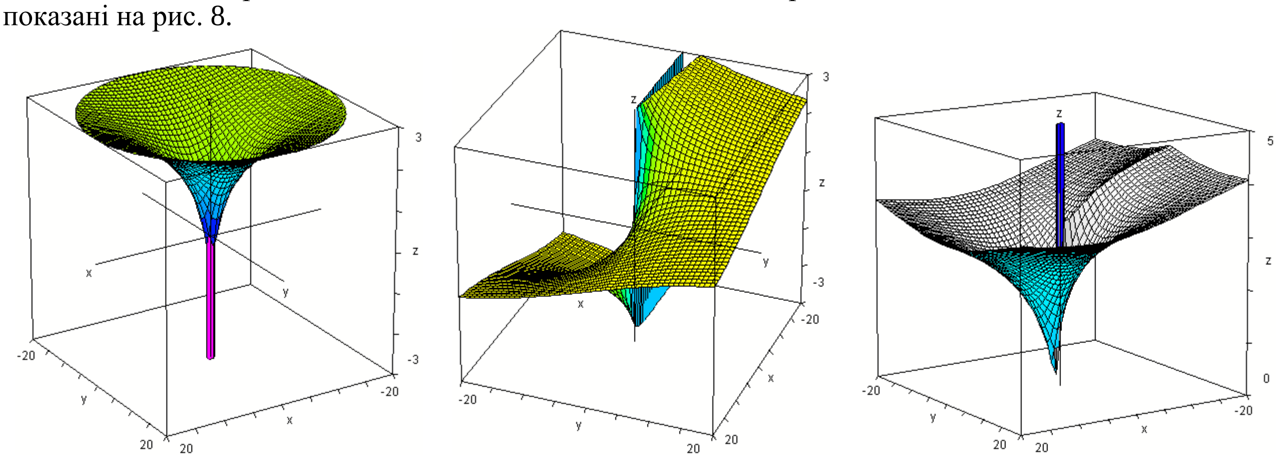
Після певних поворотів зображень дістанемо наступний вигляд поверхонь (рис. 7).



$\operatorname{Re}\ln(x+iy)$ $\quad\quad$ $\operatorname{Im}\ln(x+iy)$ $\quad\quad$ $|\ln(x+iy)|$

Рис. 7

Ті самі поверхні, тільки з інших точок оглядання, отримані за допомогою системи Derive, показані на рис. 8.



$\operatorname{Re}\ln(x+iy)$ $\quad\quad$ $\operatorname{Im}\ln(x+iy)$ $\quad\quad$ $|\ln(x+iy)|$

Рис. 8

Нагадаємо вигляд графіка логарифмічної функції дійсної змінної, зобразивши його за допомогою програми Gran1 (рис. 9).

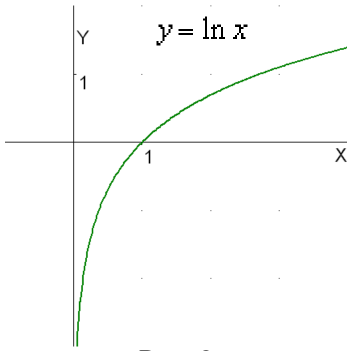



Рис. 9

**8. Диференційовність експоненціальної і логарифмічної функцій.** З рівності (5) випливає, що $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\exp z-1}{z}=1=\exp 0$, тобто якщо $f(z)=\exp z$, то $f'(0)=f(0)$.

Зафіксуємо довільне число $z_0\in\mathbb{C}$. Тоді

$$\frac{\exp z-\exp z_0}{z-z_0}=\frac{\exp z_0(\exp(z-z_0)-1)}{z-z_0}\to\exp z_0,\text{ коли } z\to z_0.$$

Це означає, що коли $f(z)=\exp z$, $z\in\mathbb{C}$, то $f'(z)=f(z)\ \ \forall z\in\mathbb{C}$.

Вважатимемо тепер, що довільне фіксоване число $z_0\neq x_0\leq 0$. Тоді $w=\ln z\to w_0=\ln z_0\Leftrightarrow z\to z_0$, а тому

$$\frac{\ln z-\ln z_0}{z-z_0}=\frac{w-w_0}{\exp w-\exp w_0}=\left(\frac{\exp w-\exp w_0}{w-w_0}\right)^{-1}\to(\exp w_0)^{-1}=\frac{1}{\exp w_0}=\frac{1}{z_0},\text{ коли } z\to z_0.$$

Це означає, що коли $f(z)=\ln z$, то $f'(z)=\dfrac{1}{z}\ \ \forall z\in\mathbb{C}\setminus\{z=x+i\cdot 0: x\leq 0\}$.

Таким чином, доведено наступну **властивість 14** (про диференційовність експоненціальної і логарифмічної функцій):

$$(\exp z)'=\exp z\ \ \forall z\in\mathbb{C},\quad a\quad(\ln z)'=\frac{1}{z}\ \ \forall z\in D=\mathbb{C}\setminus\{z=x+i\cdot 0: x\leq 0\}$$

*і тому* $\exp z$ *та* $\ln z$ *є аналітичними продовженнями відповідно* $e^x$ *з дійсної осі на комплексну площину та* $\ln x$ *з додатної частини дійсної осі на область* $D = \mathbb{C}\setminus\{z = x + i\cdot 0 : x \le 0\}$.

З властивості 14 випливає, що $\exp z$ *є також первісною для самої себе у комплексній площині, а* $\ln z$ *є первісною для функції* $\frac{1}{z}$ *в області* $D = \mathbb{C}\setminus\{z = x + i\cdot 0 : x \le 0\}$. Проте з властивості 13 випливає, що $\ln z$ не є первісною для функції $\frac{1}{z}$ у всій своїй області визначення. Разом з тим *функція* $\ln(-z)$ *також є первісною функції* $\frac{1}{z}$, *але вже в області* $D_1 = \mathbb{C}\setminus\{-z = -x \le 0\} = \mathbb{C}\setminus\{z = x \ge 0\}$, оскільки

$$\left(\ln(-z)\right)' = \frac{1}{-z}\cdot(-1) = \frac{1}{z}$$

за теоремою про похідну від складеної функції. Тому в області $D$ $\int\limits_{-i}^{i}\frac{dz}{z} = \ln z\Big|_{-i}^{i} = i\arg i - i\arg(-i) = \pi i$, а в області $D_1$ $\int\limits_{-i}^{i}\frac{dz}{z} = \ln(-z)\Big|_{-i}^{i} = i\arg(-i) - i\arg(i) = -\pi i$.

**9. Означення, неперервність та диференційовність степеневої функції.** Оскільки для довільного $z = x > 0$ і дійсного показника $\alpha$ з означення натурального логарифма числа $x$ випливає рівність $x^\alpha = e^{\alpha\ln x} = \exp(\alpha\ln x)$, то природно поширити цю рівність на довільні комплексні числа $z$ і $\alpha$, поклавши за означенням, що

$$z^\alpha := \exp(\alpha\ln z) \quad \forall z \ne 0 .$$

При цьому для випадку $\operatorname{Re}\alpha > 0$ можна довизначити $z^\alpha$ в нулі: $0^\alpha := 0$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Якщо ж $\alpha = 0$, то доцільно вважати, що $0^0 = 1$ і, таким чином, $z^0 = 1$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Дослідимо степеневу функцію на неперервність і диференційовність в залежності від її показника.

За теоремою про похідну від складеної функції маємо, що коли $z_0 = D = \mathbb{C}\setminus\{z = x : x \le 0\}$, а $f(z) = z^\alpha = \exp(\alpha\ln z)$, то

$$f'(z_0) = \exp(\alpha\ln z_0)\cdot\frac{\alpha}{z_0} = \alpha\frac{\exp(\alpha\ln z_0)}{\exp(\ln z_0)} = \alpha\exp(\alpha\ln z_0 - \ln z_0) = \alpha\exp\left((\alpha-1)\ln z_0\right) = \alpha z_0^{\alpha-1}$$

для будь-якого фіксованого показника $\alpha \in \mathbb{C}$.

Перевіримо, чи може функція $z^\alpha$ бути диференційовною у якій-небудь точці $z_0 = x_0 \le 0$ при певних значеннях показника $\alpha$. Припустимо спочатку, що $\alpha \in \mathbb{R}$, і зафіксуємо довільну точку $x_0 < 0$. У цьому випадку

$$f(z) = z^\alpha = |z|^\alpha\left(\cos(\alpha\arg z) + i\sin(\alpha\arg z)\right).$$

Тоді якщо $z = x + iy \to x_0$ і $y \ge 0$, то $z^\alpha \to \; \to |x_0|^\alpha\left(\cos(\pi\alpha) + i\sin(\pi\alpha)\right)$, а якщо $z = x + iy \to x_0$ і $y < 0$, то $z^\alpha \to |x_0|^\alpha\left(\cos(\pi\alpha) - i\sin(\pi\alpha)\right)$. Тому для того щоб функція $z^\alpha$ була неперервною у точці $x_0 < 0$, необхідно і достатньо, щоб $\sin(\pi\alpha) = -\sin(\pi\alpha) \Leftrightarrow \sin(\pi\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$. Отже, встановлено, що функція $f(z) = z^\alpha$ є неперервною на інтервалі $(-\infty; 0)$, коли $\alpha \in \mathbb{Z}$, і є розривною в кожній точці цього інтервалу, коли $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

Припустимо тепер, що $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, тобто $\alpha = a + bi$, $b \ne 0$. Подамо $z^\alpha = (x + iy)^{a+bi}$ в алгебраїчній формі. Для цього можна скористатися програмою Maxima і, ввівши вираз (x+%i*y)^(a+%i*b), задати команду rectform(%), factor. Дістанемо відповідь

$$\left(y^2 + x^2\right)^{\frac{a}{2}} e^{-b\operatorname{atan}_2(y,x)}\left(i\sin\left(\frac{b\log\left(y^2 + x^2\right) + 2a\operatorname{atan}_2(y,x)}{2}\right) + \cos\left(\frac{b\log\left(y^2 + x^2\right) + 2a\operatorname{atan}_2(y,x)}{2}\right)\right),$$

яку можна переписати коротше:

$$z^\alpha = \frac{|z|^a}{e^{b\varphi}}\left(\cos(b\ln|z| + a\varphi) + i\sin(b\ln|z| + a\varphi)\right), \tag{12}$$

де $\varphi = \operatorname{arctg}_2(y, x) = \arg z$. Зауважимо, що рівність (12) є правильною для будь-якого показника $\alpha = a + bi$. З цієї рівності дістаємо *уявлення про множину* $E(f)$ *значень* $f(z) = z^\alpha$:

$E(f) = \mathbb{C}$, коли $a = \operatorname{Re}\alpha \ge 1$ або ( $a > 0$ і $b = \operatorname{Im}\alpha \ne 0$ );
$E(f) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, коли $a \le -1$ або ( $a < 0$ і $b \ne 0$ );
$E(f) = \{1\}$, коли $a = b = 0$;

$$E(f)=\{w\in\mathbb{C}: \arg w\in(-\pi a;\pi a]\}, \qquad \text{коли} \quad 0<a<1 \text{ і } b=0;$$
$$E(f)=\{w\in\mathbb{C}: \ w\neq 0,\ \arg w\in[-a\pi;a\pi)\}, \qquad \text{коли} \quad -1<a<0 \text{ і } b=0;$$
$$E(f)=\{w\in\mathbb{C}: \ |w|\in[e^{-\pi b};e^{\pi b})\}, \qquad \text{коли} \quad a=0 \text{ і } b>0;$$
$$E(f)=\{w\in\mathbb{C}: \ |w|\in(e^{-\pi b};e^{\pi b}]\}, \qquad \text{коли} \quad a=0 \text{ і } b<0.$$

Вважаючи тепер точку $x_0<0$ довільною фіксованою, можна стверджувати, що коли $y\geq 0$ і $z=x+iy\to x_0$, то $|z|^{\alpha}\to\dfrac{|x_0|^a}{e^{\pi b}}$, а коли $z=x+iy\to x_0$ і $y<0$, то $|z|^{\alpha}\to\dfrac{|x_0|^a}{e^{-\pi b}}$. Це означає, що у випадку недійсного показника $\alpha$ функція $f(z)=z^{\alpha}$ розривна в усіх точках інтервалу $(-\infty;0)$. Враховуючи встановлене вище, дістаємо, що $f(z)=z^{\alpha}$ *розривна в усіх точках інтервалу* $(-\infty;0)$, *коли* $\alpha\notin Z$, *тобто коли показник не є цілим.* Легко бачити, що коли $\operatorname{Re}\alpha>0$ і тільки в такому випадку, функція $f(z)=z^{\alpha}$ є неперервною в точці $z_0=0$.

З'ясуємо, чи буде функція $f(z)=z^{\alpha}$ диференційовною на $(-\infty;0)$, коли $\alpha\in\mathbb{Z}$. Припустимо спочатку, що $\alpha=n\in\mathbb{Z}$. Тоді, якою б не була точка $z_0\in\mathbb{C}$, існує похідна

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z_0+\Delta z)^n-z_0^n}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z_0+\Delta z-z_0}{\Delta z}\left((z_0+\Delta z)^{n-1}+(z_0+\Delta z)^{n-2}z_0+\ldots+z_0^{n-1}\right)=nz_0^{n-1},$$

якщо $n>1$ або $z_0\neq 0$. У випадку $n=1$ маємо $f'(z_0)=1\ \ \forall z_0\in\mathbb{C}$. Зрозуміло, що $f'(z_0)=0\ \forall z_0\in\mathbb{C}$, коли $\alpha=0$.

Якщо $\alpha=-m,\ m\in\mathbb{N}$, то $z^{\alpha}=z^{-m}=\dfrac{1}{z^m}$ і за правилом диференціювання частки дістаємо, що в кожній точці $z_0\neq 0$ існує $f'(z_0)=\dfrac{-mz_0^{m-1}}{(z_0^m)^2}=-mz_0^{-m-1}=\alpha z_0^{\alpha-1}$.

Нарешті, враховуючи (12), легко довести, що функція $f(z)=z^{\alpha}$ диференційовна в точці $z_0=0$ і $f'(0)=0$, коли $\operatorname{Re}\alpha>1$, і похідна $f'(0)$ не існує, коли $0<\operatorname{Re}\alpha<1$ або ($\operatorname{Re}\alpha=1$ і $\operatorname{Im}\alpha\neq 0$).

Наведені міркування дозволяють сформулювати наступну **властивість 15** (про неперервність і диференційовність степеневої функції): *В залежності від показника* $\alpha$ *степенева функція* $f(z)=z^{\alpha}$ *має різні множини точок розриву і різні множини точок недиференційовності. Відомості про ці множини відображено у наступній таблиці:*

| Випадок | $\alpha$ | Множина точок розриву $z^{\alpha}$ | Множина точок недиференційовності $z^{\alpha}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\alpha\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 2 | $\alpha\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0$ | $\{0\}$ | $\{0\}$ |
| 3 | $\alpha\notin\mathbb{Z}$ і $\operatorname{Re}\alpha>1$ | $(-\infty;0)$ | $(-\infty;0)$ |
| 4 | $\alpha\notin\mathbb{Z}$ і $0<\operatorname{Re}\alpha\leq 1$ | $(-\infty;0)$ | $(-\infty;0]$ |
| 5 | $\alpha\notin\mathbb{Z}$ і $\operatorname{Re}\alpha\leq 0$ | $(-\infty;0]$ | $(-\infty;0]$ |

*При цьому в усіх точках* $z$, *де похідна існує,* $(z^{\alpha})'=\alpha z^{\alpha-1}$ (*у випадку* $\alpha=1$ *вважаємо* $0^0=1$).

З властивості 15 випливає наступна **властивість 16** (про первісну степеневої функції): *Якщо* $\alpha\neq -1$, *то*

$$\int z^{\alpha}dz=\frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \ C\in\mathbb{C},$$

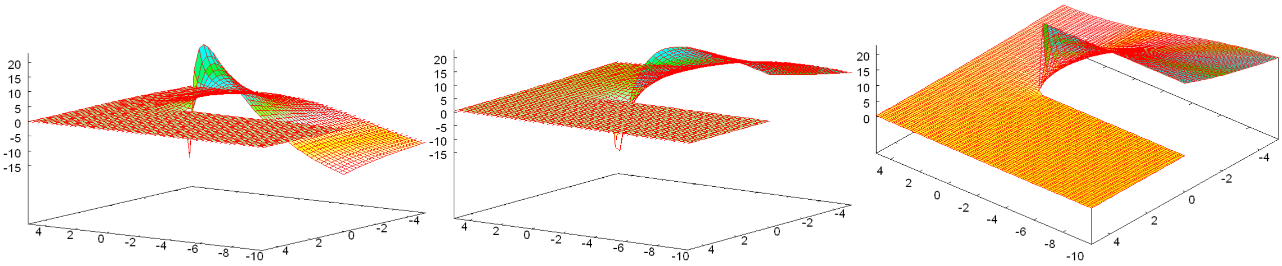
*причому ця рівність є правильною*: 1) *в області* $D_1=\mathbb{C}\setminus(-\infty;\ 0]$, *коли* $\alpha\notin\mathbb{Z}$ *і* $\operatorname{Re}\alpha\leq 1$; 2) *на множині* $D_2=\mathbb{C}\setminus(-\infty;\ 0)$, *коли* $\alpha\notin\mathbb{Z}$ *і* $\operatorname{Re}\alpha>1$; 3) *в області* $D_3=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, *коли* $\alpha\in\mathbb{N}_-=\{-n:n\in\mathbb{N}\}$, *і* 4) *в усій комплексній площині* $\mathbb{C}$, *коли* $\alpha\in\mathbb{N}_0=\{0,1,\ldots,n,\ldots\}$.

Нагадаємо, що випадок $\alpha=-1$ розглянуто у попередньому пункті 8.

Наведемо комп'ютерні зображення (рис. 10) у програмі Maxima графіків дійсної, уявної частини і модуля однієї зі степеневих функцій, наприклад,

$$f(z)=z^i=e^{i\ln z}=e^{i\ln|z|-\arg z}=e^{-\arg z}(\cos\ln|z|+i\sin\ln|z|).$$

| $z=\operatorname{Re}(x+iy)^i$ | $z=\operatorname{Im}(x+iy)^i$ | $z=\left\|(x+iy)^i\right\|$ |
| --- | --- | --- |
| load(draw)$ draw3d(<br>user_preamble="set pm3d<br>at s depthorder",<br>nticks=500,color=red,<br>colorbox=false,<br>palette=[-22,-2,19],<br>xu_grid=50,yv_grid=50,<br>explicit(realpart((x+%i*y)^%i),<br>x,-10,5,y,0.0001,5),<br>explicit(realpart((x+%i*y)^%i),<br>x,-10,5,y,-0.0001,-5),<br>yrange=[-5,5]); | load(draw)$ draw3d(<br>user_preamble="set pm3d<br>at s depthorder",<br>nticks=500,color=red,<br>colorbox=false,<br>palette=[-22,-2,19],<br>xu_grid=50,yv_grid=50,<br>explicit(imagpart((x+%i*y)^%i),<br>x,-10,5,y,0.0001,5),<br>explicit(imagpart((x+%i*y)^%i),<br>x,-10,5,y,-0.0001,-5),<br>yrange=[-5,5]); | load(draw)$ draw3d(<br>user_preamble="set pm3d<br>at s depthorder",<br>nticks=500,color=red,<br>colorbox=false,<br>palette=[-22,-2,19],<br>xu_grid=50,yv_grid=50,<br>explicit(abs((x+%i*y)^%i),<br>x,-10,5,y,0.0001,5),<br>explicit(abs((x+%i*y)^%i),<br>x,-10,5,y,-0.0001,-5),<br>yrange=[-5,5]); |

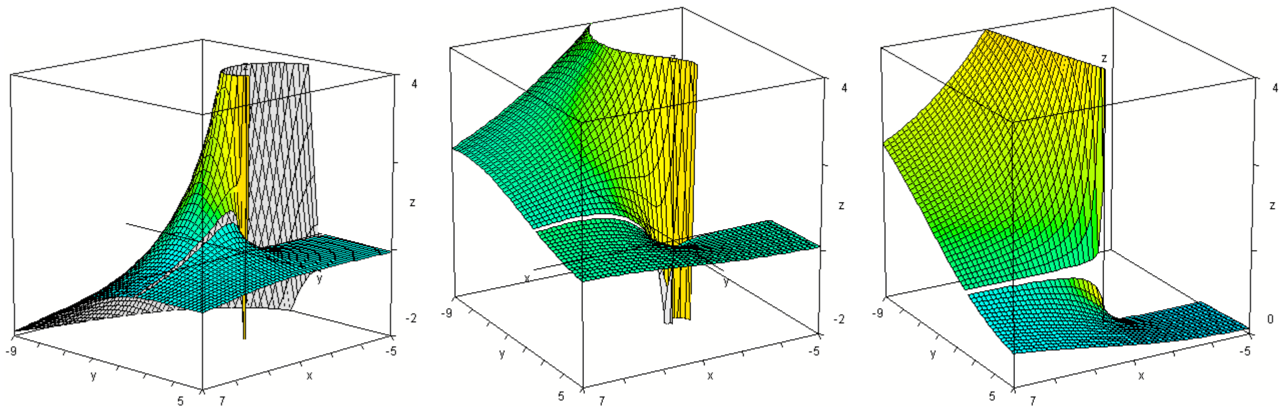


$z=\operatorname{Re}(x+iy)^i$ $\qquad$ $z=\operatorname{Im}(x+iy)^i$ $\qquad$ $z=\left|(x+iy)^i\right|$

Рис. 10

Зобразимо ці самі поверхні за допомогою Derive, так само склеюючи їх з двох частин (рис. 11). Ці частини можна задати, наприклад, так:

re(x+#i*y)^#i*ln(y+0.0001)/ln(y+0.0001) і re(x+#i*y)^#i*ln(-y-0.0001)/ln(-y-0.0001).



$\operatorname{Re}(x+iy)^i$ $\qquad$ $\operatorname{Im}(x+iy)^i$ $\qquad$ $\left|(x+iy)^i\right|$

Рис. 11

Слід зазначити, що повністю передати всі особливості поведінки даних функцій за допомогою їх графіка практично неможливо. Чому? У їх задання входить вираз типу $\cos\ln x$. Цей вираз задає коливний процес, причому його значення коливаються між $-1$ та $1$ і коли $x\to 0+$, і коли $x\to+\infty$. При цьому точки повтору пов'язані формулою $y=e^{2\pi k}x$. Тому відстань між ними стає або астрономічно великою, коли рухатися вправо, або мікроскопічно малою, коли рухатися вліво. Наприклад, для точки $x=1$ перша точка повтору справа $x_1\approx 535$, друга $x_2\approx 286751$; вліво першою йде точка повтору $x_3\approx 0{,}002$, а другою $x_4\approx 3\cdot 10^{-6}$. Зрозуміло, що побачити на графіку такої функції хоча б три хвилі коливань дуже проблематично.

Нагадаємо вигляд графіків дійсної степеневої функції $y=x^{\alpha}$ при різних значеннях показника $\alpha$, зобразивши їх за допомогою програми Gran1 (рис. 12).

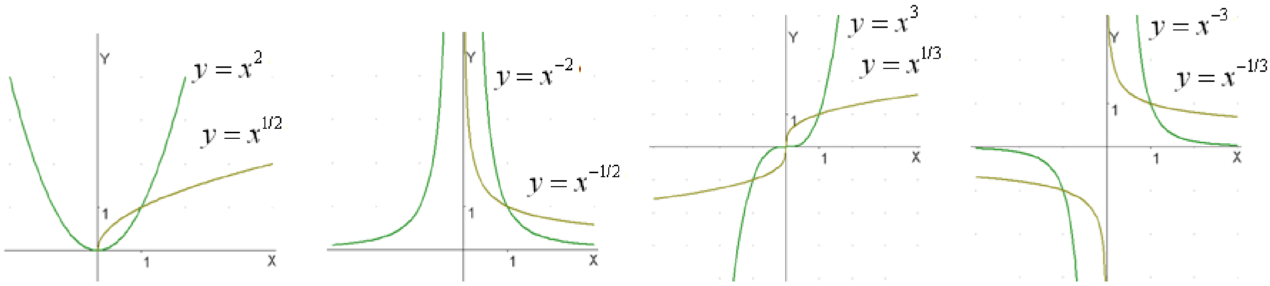



Рис. 12

**10. Означення, неперервність і диференційовність тригонометричних функцій.** Згідно з властивістю 10

$$\cos y = \frac{1}{2}(\exp iy + \exp(-iy)), \quad \sin y = \frac{1}{2i}(\exp iy - \exp(-iy)) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

на основі цих рівностей можна означити косинус та синус довільного комплексного числа $z$ за допомогою формул

$$\cos z = \frac{1}{2}(\exp iz + \exp(-iz)), \quad \sin y = \frac{1}{2i}(\exp iz - \exp(-iz)) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{13}$$

Враховуючи, що за властивістю 14 $(\exp z)' = \exp z \quad \forall z$, з формул (13) зразу дістаємо, що

$$(\cos z)' = \left(\frac{1}{2}(\exp iz + \exp(-iz))\right)' = \frac{1}{2}(i\exp iz + (-i)\exp(-iz)) =$$
$$= -\frac{1}{2i}(\exp iz - \exp(-iz)) = -\sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

і аналогічно $(\sin z)' = \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Природним чином означивши тангенс і котангенс довільного комплексного числа $z$ рівностями

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \tag{14}$$

можна довести, що

$$D(tg) = \{z \in \mathbb{C} : \cos z \neq 0\} = \{z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\},$$
$$D(ctg) = \{z \in \mathbb{C} : \cos z \neq 0\} = \{z \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

При цьому

$$(\operatorname{tg} z)' = \left(\frac{\sin z}{\cos z}\right)' = \frac{\cos^2 z - (-\sin z)\sin z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z} \quad \forall z \in D(\operatorname{tg})$$

і аналогічно $(\operatorname{ctg} z)' = -\dfrac{1}{\sin^2 z} \quad \forall z \in D(\operatorname{ctg})$.

Таким чином, *тригонометричні функції є диференційовними, а тому й неперервними у своїх областях визначення. У цих самих областях*

$$\int \cos z\, dz = \sin z + C, \quad \int \sin z\, dz = -\cos z + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 z} dz = \operatorname{tg} z + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 z} dz = -\operatorname{ctg} z + C.$$

Отже, *тригонометричні функції комплексної змінної є аналітичними продовженнями відповідних тригонометричних функцій дійсної змінної з областей їх визначення на дійсній осі на області визначення у комплексній площині.*

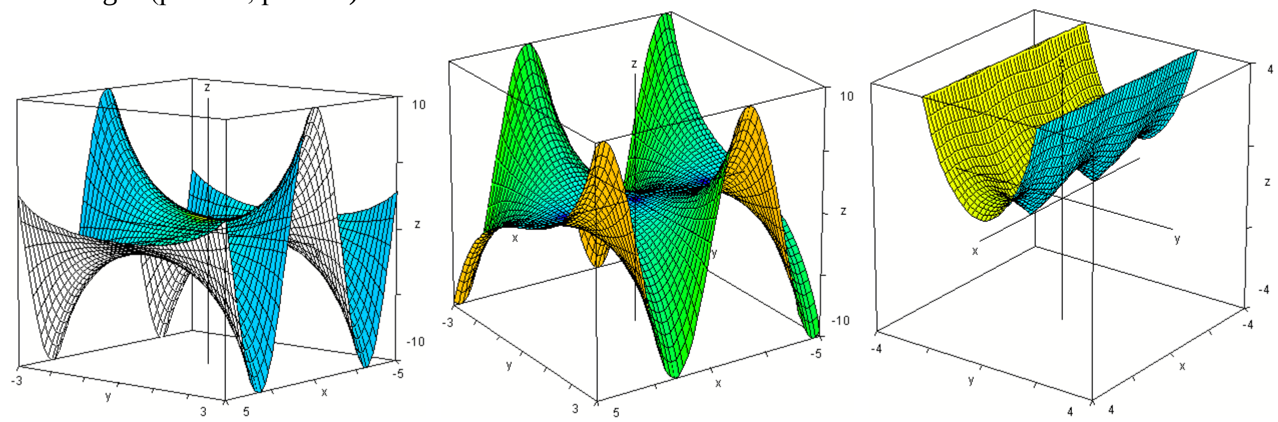
Виділимо дійсну та уявну частину і знайдемо модуль кожної з тригонометричних функцій та побудуємо їх графіки за допомогою комп'ютера.

Наведемо відповідні команди у програмі Maxima та результати їх виконання.

| Команда | Результат |
|---|---|
| (%i1) rectform(cos(x+%i*y)); | (%o1) $\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$ |
| (%i2) rectform(sin(x+%i*y)); | (%o2) $\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$ |
| (%i3) rectform(tan(x+%i*y)),factor; | (%o3) $\dfrac{i\operatorname{sh}(2y) + \sin(2x)}{\operatorname{ch}(2y) + \cos(2x)}$ |
| (%i4) realpart(cot(x+%i*y)),trigsimp,factor,trigreduce,factor; | (%o4) $\dfrac{2\sin(2x)\operatorname{ch}(2y) + \sin(4x)}{\operatorname{ch}(4y) - \cos(4x)}$ |

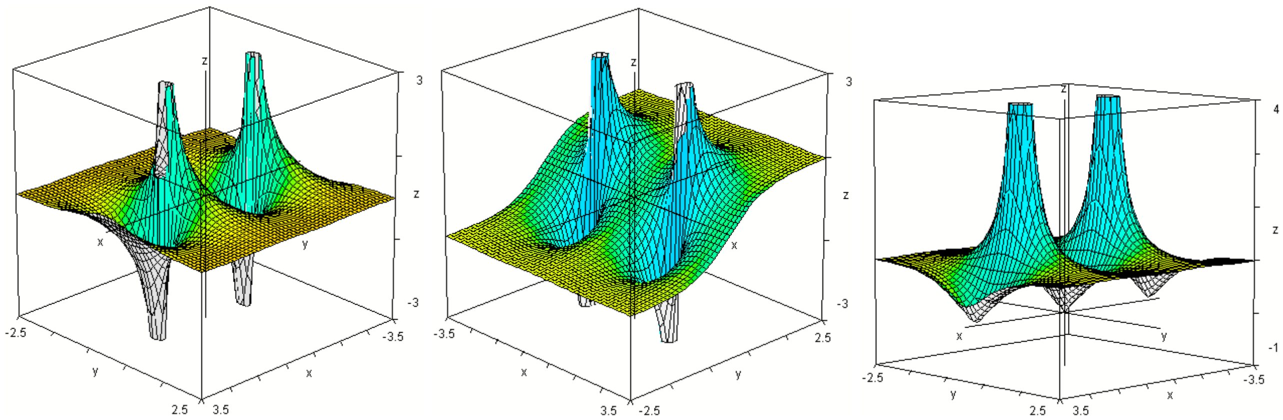
| Команда | Результат |
|---|---|
| (%i5) imagpart(cot(x+%i*y)),trigsimp,factor,trigreduce,factor; | (%o5) $-\dfrac{\operatorname{sh}(4y)+2\cos(2x)\operatorname{sh}(2y)}{\operatorname{ch}(4y)-\cos(4x)}$ |
| (%i6) abs(cos(x+%i*y)),trigreduce,factor | (%o6) $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch}(2y)+\cos(2x)}}{\sqrt{2}}$ |
| (%i7) abs(sin(x+%i*y)),trigreduce,factor | (%o7) $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch}(2y)-\cos(2x)}}{\sqrt{2}}$ |
| (%i8) abs(tan(x+%i*y)),trigreduce,factor | (%o8) $\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}(2y)-\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)+\cos(2x)}}$ |
| (%i9) abs(cot(x+%i*y)),trigreduce,radcan; | (%o9) $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch}(2y)+\cos(2x)}}{\sqrt{\operatorname{ch}(2y)-\cos(2x)}}$ |

За допомогою Derive зобразимо графіки наведених у таблиці функцій, пов’язаних з функціями $\cos z$ і $\operatorname{tg} z$ (рис. 13, рис. 14).



$\operatorname{Re}\cos(x+iy)$ $\operatorname{Im}\cos(x+iy)$ $|\cos(x+iy)|$

Рис. 13

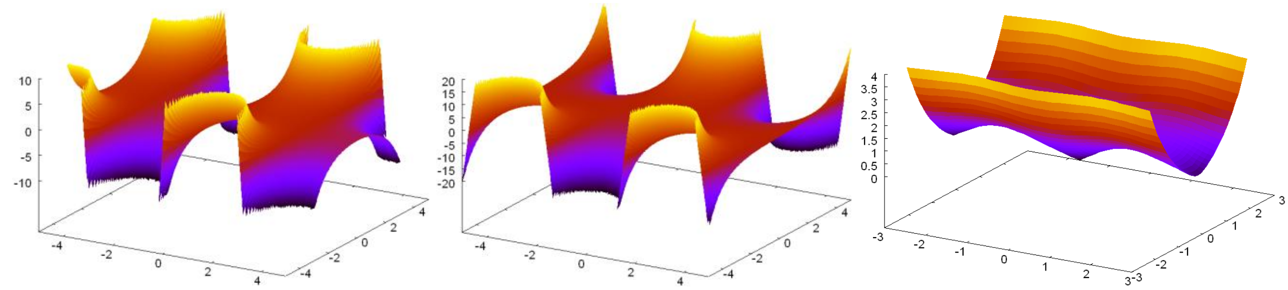


$\operatorname{Re}\operatorname{tg}(x+iy)$ $\operatorname{Im}\operatorname{tg}(x+iy)$ $|\operatorname{tg}(x+iy)|$

Рис. 14

Тепер за допомогою програми Maxima зобразимо поверхні, пов’язані з функціями $\sin z$ і $\operatorname{ctg} z$ (рис. 15, рис. 16).

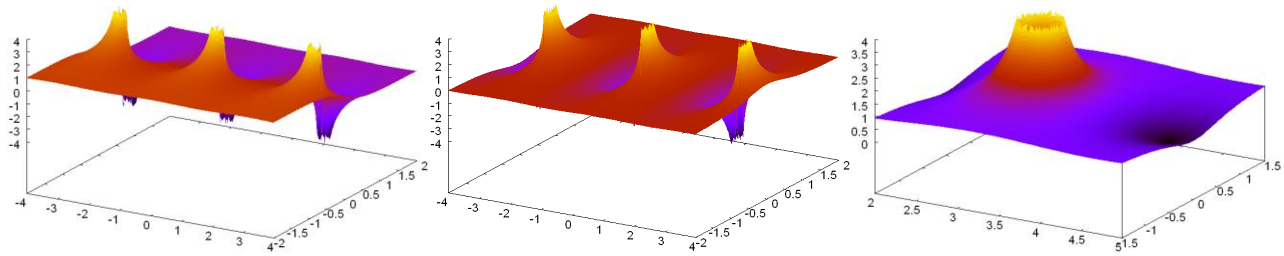
| $z=\operatorname{Re}\sin(x+iy)$ | $z=\operatorname{Im}\sin(x+iy)$ | $z=\lvert\sin(x+iy)\rvert$ |
|---|---|---|
| load(draw)$ draw3d(<br>colorbox=false,<br>enhanced3d=true,<br>xu_grid=300,yv_grid=300,<br>explicit(realpart(sin(x+%i*y)),<br>x,-5,5,y,-5,5),<br>zrange=[-10,10])$ | load(draw)$ draw3d(<br>colorbox=false,<br>enhanced3d=true,<br>xu_grid=300,yv_grid=300,<br>explicit(imagpart(sin(x+%i*y)),<br>x,-5,5,y,-5,5),<br>zrange=[-20,20])$ | load(draw)$ draw3d(<br>colorbox=false,<br>enhanced3d=abs(sin(x+%i*y)),<br>xu_grid=50,yv_grid=50,<br>explicit(abs(sin(x+%i*y)),<br>x,-3,3,y,-3,3),<br>zrange=[0,4])$ |



$\operatorname{Re}\sin(x+iy)$ $\operatorname{Im}\sin(x+iy)$ $|\sin(x+iy)|$

Рис. 15

| $z=\operatorname{Re}\operatorname{ctg}(x+iy)$ | $z=\operatorname{Im}\operatorname{ctg}(x+iy)$ | $z=\lvert\operatorname{ctg}(x+iy)\rvert$ |
|---|---|---|
| load(draw)$ draw3d( colorbox=false, enhanced3d=true, xu_grid=300,yv_grid=300, explicit(realpart(cot(x+%i*y)), x,-4,4,y,-2,2), zrange=[-4,4])$ | load(draw)$ draw3d( colorbox=false, enhanced3d=true, xu_grid=300,yv_grid=300, explicit(imagpart(cot(x+%i*y)), x,-4,4,y,-2,2), zrange=[-4,4])$ | load(draw)$ draw3d( colorbox=false, enhanced3d=true, xu_grid=200,yv_grid=200, explicit(abs(cot(x+%i*y)), x,2,5,y,-1.5,1.5), zrange=[0,4])$ |



$\operatorname{Re}\sin(x+iy)$ $\operatorname{Im}\sin(x+iy)$ $|\sin(x+iy)|$

Рис. 16

Нагадаємо вигляд графіків тригонометричних функцій дійсної змінної, зобразивши їх за допомогою Gran1 (рис. 17).

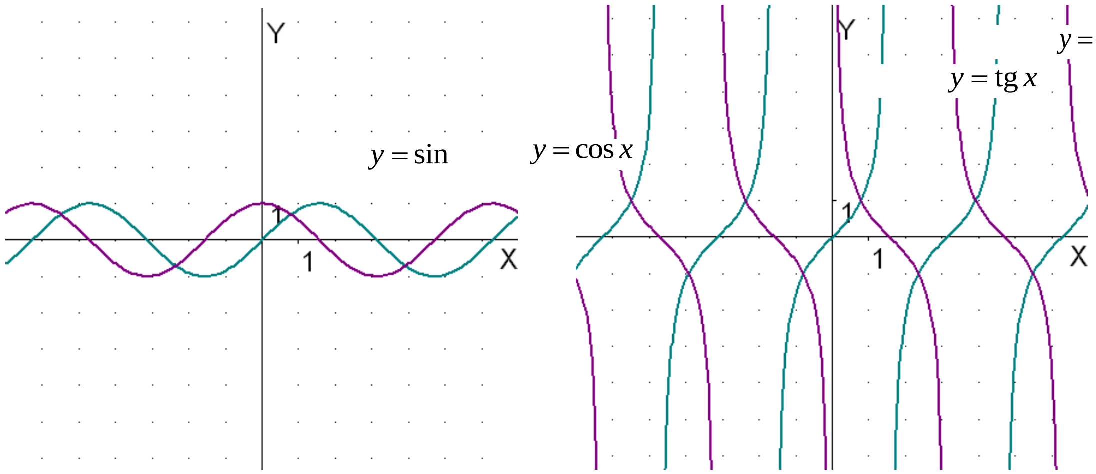



Рис. 17

**11. Означення, неперервність і диференційовність обернених тригонометричних функцій.** Обернені тригонометричні функції дійсної змінної є оберненими до функцій $y=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $y=\cos x$, $x\in[0;\pi]$, $y=\operatorname{tg} x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, та $y=\operatorname{ctg} x$, $x\in(0;\pi)$. З'ясуємо, як дістати відповідні обернені тригонометричні функції комплексної змінної.

**11.1.** Зафіксуємо довільне комплексне число $z$ і розглянемо рівняння з невідомим $w$:

$$\sin w = z \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2i}\left(\exp iw - \exp(-iw)\right) = z \ \Leftrightarrow\ (\exp iw)^2 - 2i\exp iw - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ \exp iw = iz + \sqrt{1-z^2}\ .$$

Звідси за властивістю 11 маємо, що

$$\sin w = z \ \Leftrightarrow\ w = -i\,\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}) = -i\left(\ln(iz+\sqrt{1-z^2}) + 2i\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z},$$

де $\sqrt{1-z^2}$ може набувати будь-якого з двох можливих значень. Таким чином, *кожне комплексне число $z$ є значенням синуса у зчисленній кількості точок $w$* (тобто *множиною значень функції синус комплексної змінної є вся комплексна площина*). Множину всіх таких точок $w$ позначають $\mathrm{Arcsin}\, z$. Серед усіх знайдених розв'язків рівняння $\sin w = z$ виділяють один, так званий головний розв'язок: $w = -i\ln(iz+\sqrt{1-z^2})$, де

$$\sqrt{1-z^2} = \sqrt{|1-z^2|}\left(\cos\arg(1-z^2) + i\sin\arg(1-z^2)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(1-z^2)\right),$$

$z \neq \pm 1$, $\sqrt{0} = 0$, – головне значення кореня квадратного.

Оскільки для $z = x \in [-1;1]$

$$w = -i\ln(ix+\sqrt{1-x^2}) = -i\left(\ln\left|ix+\sqrt{1-x^2}\right| + i\arg(ix+\sqrt{1-x^2})\right) =$$
$$= -i\left(\ln 1 + i\arg(ix+\sqrt{1-x^2})\right) = \arg(ix+\sqrt{1-x^2}),$$

причому $\sin w = x$, а $\sqrt{1-x^2}\geq 0$, то $\arg(ix-\sqrt{1-x^2}) \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, і тому таке число $w$ співпадає з дійсним арксинусом числа $x$, тобто $w = \arcsin x$. Тому природно назвати *арксинусом комплексного числа* вираз $-i\ln(iz+\sqrt{1-z^2})$ і позначити його $\arcsin z$. Отже,

$$\arcsin z = -i\ln(iz+\sqrt{1-z^2})\quad \forall z\in\mathbb{C}, \tag{15}$$

оскільки $iz+\sqrt{1-z^2}\neq 0\ \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Зауважимо, що $\arcsin(\pm 1) = -i\ln(\pm i) = -i\left(\ln|\pm i| + i\arg(\pm i)\right) = -i\left(\pm i\frac{\pi}{2}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$.

Якщо $z = x$ і $|x|>1$, то можна знайти всі розв'язки рівняння $\sin w = x$ за формулою

$$w = \mathrm{Arcsin}\, x = -i\,\mathrm{Ln}(ix \pm i\sqrt{x^2-1}) = -i\left(\ln\left|x\pm\sqrt{x^2-1}\right| \pm i\frac{\pi}{2} + 2i\pi k\right) = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln\left|x\pm\sqrt{x^2-1}\right|.$$

Як видно, всі ці розв'язки є уявними числами. Отже, *синус може набувати значень, більших за* 1 *чи менших за* $-1$, *проте лише в уявних точках* $w = u + iv = \pm\pi/2 + 2\pi k - i\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Рівністю (15) визначається функція $f(z) = \arcsin z$, $z\in\mathbb{C}$, яку також називають *арксинусом.* Область визначення цієї функції $D(f) = \mathbb{C}$.

Ця функція є диференційовною, а тому й неперервною в кожній точці $z$, у якій диференційовні функції $\sqrt{1-z^2} = \exp\frac{1}{2}\ln(1-z^2)$ і $\ln w = \ln(iz+\sqrt{1-z^2})$. Згідно з властивістю 14 це має місце, коли $1-z^2\notin(-\infty;0]$ та $iz+\sqrt{1-z^2}\notin(-\infty;0]$.

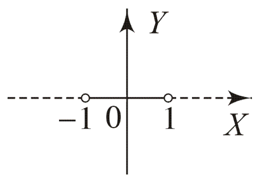
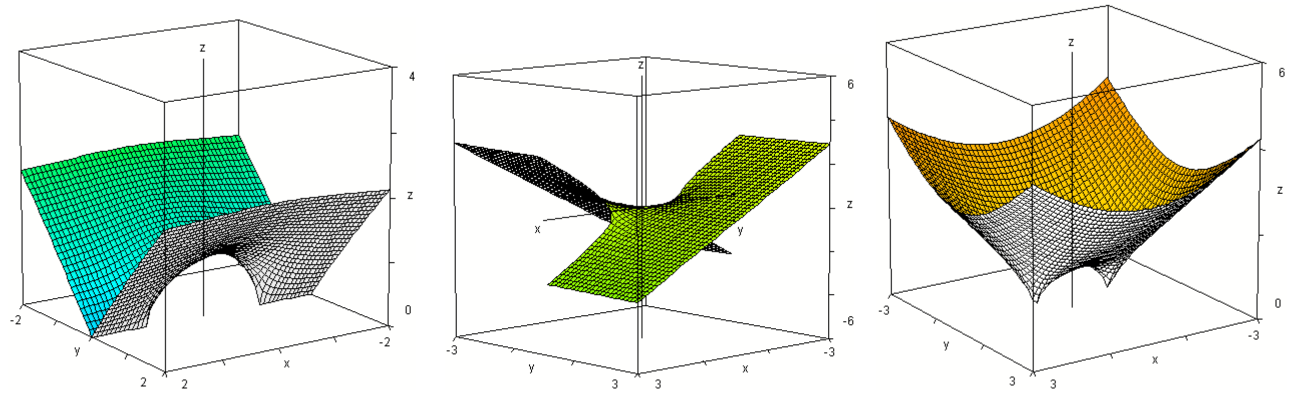



Рис. 18

Оскільки $\mathrm{Re}(1-z^2) = \mathrm{Re}(1-x^2+y^2-2ixy) = 1-x^2+y^2$, то $\sqrt{1-z^2}$ не є навіть неперервною функцією, коли $z = x$, де $|x|>1$. В усіх точках області $D = \mathbb{C}\setminus\{z = x : |x|\geq 1\}$ функція $\sqrt{1-z^2}$ є диференційовною, причому

$$\left(\sqrt{1-z^2}\right)' = \left(\exp\frac{1}{2}\ln(1-z^2)\right)' = \exp\frac{1}{2}\ln(1-z^2)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2z}{1-z^2} = -z\frac{\sqrt{1-z^2}}{1-z^2} = \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Графіки дійсної і уявної частин функції $\sqrt{1-z^2}$ та її модуля, отримані за програмою Derive, подані на рис. 19.



$\operatorname{Re}\sqrt{1-z^2}$ $\qquad\qquad$ $\operatorname{Im}\sqrt{1-z^2}$ $\qquad\qquad$ $\left|\sqrt{1-z^2}\right|$

Рис. 19

Зафіксуємо довільне число $z = x+iy \in D$ і знайдемо дійсну частину виразу $iz+\sqrt{1-z^2}$ :

$$\operatorname{Re}(iz+\sqrt{1-z^2}) = \operatorname{Re}(ix-y+\sqrt{1-x^2+y^2-2ixy}) = -y+\sqrt{|1-z^2|}\cos\frac{\arg(1-z^2)}{2} =$$

$$= -y+\sqrt{|1-z^2|}\sqrt{\frac{1+\cos\arg(1-z^2)}{2}} = -y+\sqrt{|1-z^2|}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1-x^2+y^2}{|1-z^2|}\right)} = -y+\sqrt{\frac{1}{2}\left(|1-z^2|+1-x^2+y^2\right)}.$$

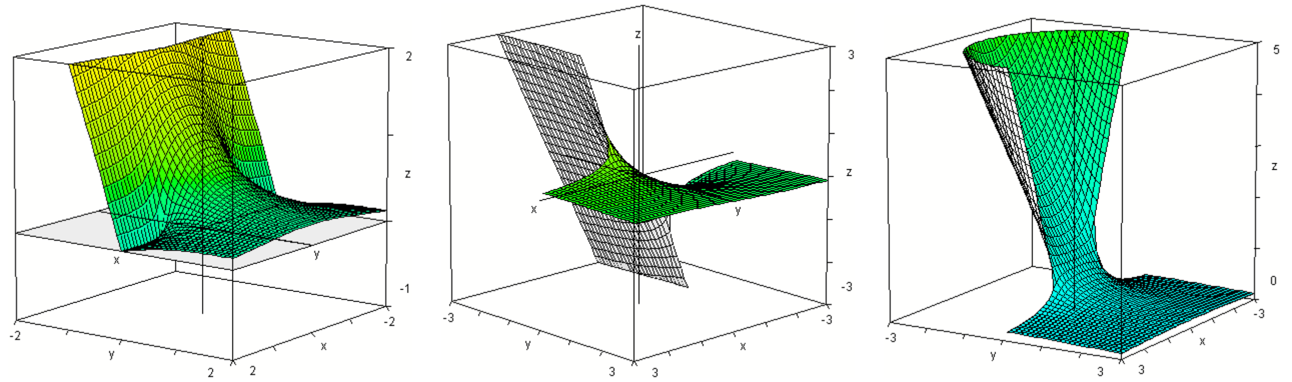
Оскільки

$$|1-z^2| = \sqrt{(1-x^2+y^2)^2+4x^2y^2} = \sqrt{1-2(x^2-y^2)+(x^2-y^2)^2+4x^2y^2} =$$
$$= \sqrt{4y^2+1-2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2} = \sqrt{4y^2+(x^2-1+y^2)^2},$$

то:

- у випадку $y=0$ маємо $|x|<1$ і тому $\operatorname{Re}(iz+\sqrt{1-z^2}) = \operatorname{Re}(ix+\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2} > 0$;
- у випадку $y \neq 0$ і $|x| \le 1$ маємо $|1-z^2| = \sqrt{2y^2+(x^2-1)^2+2x^2y^2+y^4} > y^2$ і тому
$$\operatorname{Re}(iz+\sqrt{1-z^2}) > -y+\sqrt{\frac{1}{2}\left(y^2+1-x^2+y^2\right)} \ge -y+\sqrt{y^2} \ge -y+|y| \ge 0;$$
- у випадку $y \neq 0$ і $|x|>1$ маємо $|1-z^2| > y^2+x^2-1$ і тому
$$\operatorname{Re}(iz+\sqrt{1-z^2}) > -y+\sqrt{\frac{1}{2}\left(y^2+x^2-1+1-x^2+y^2\right)} = -y+|y| \ge 0.$$

Графіки функцій $\operatorname{Re}(iz+\sqrt{1-z^2})$, $\operatorname{Im}(iz+\sqrt{1-z^2})$ і $\left|iz+\sqrt{1-z^2}\right|$, отримані за допомогою Derive, подані на рис. 20.



$\operatorname{Re}(iz+\sqrt{1-z^2})$ $\qquad\qquad$ $\operatorname{Im}(iz+\sqrt{1-z^2})$ $\qquad\qquad$ $\left|iz+\sqrt{1-z^2}\right|$

Рис. 20

Отже, $\operatorname{Re}(iz+\sqrt{1-z^2}) > 0 \quad \forall z \in D$ і тому існує похідна

$$(\arcsin z)' = \left(-i\ln(iz+\sqrt{1-z^2})\right)' = -i\cdot\frac{i-\dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}}{iz+\sqrt{1-z^2}} = \frac{\sqrt{1-z^2}+iz}{iz+\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \quad \forall z \in D.$$

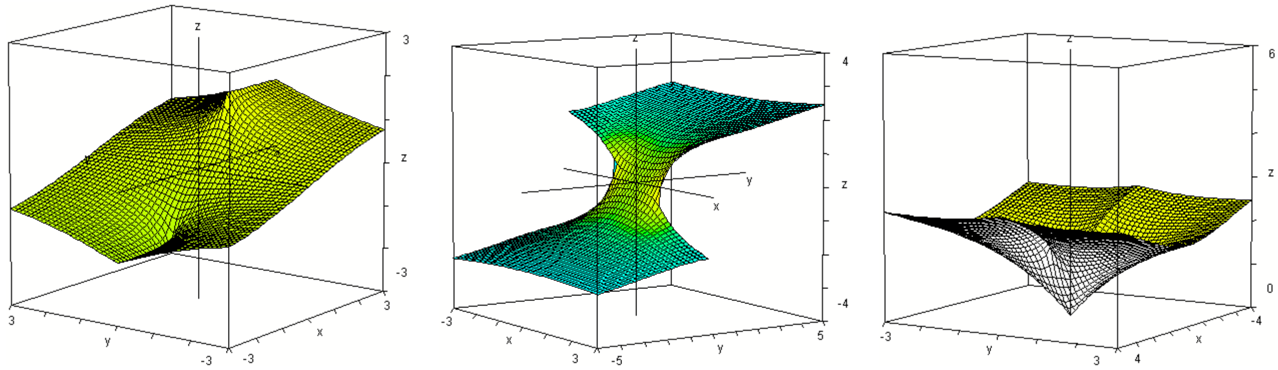
Це означає, що $\arcsin z$ *є диференційовною, а тому й неперервною функцією в області* $D$, *а також функція* $\arcsin z$ *є первісною функції* $1/\sqrt{1-z^2}$ *в області* $D$ *і тому*

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z + C = -i\ln(iz + \sqrt{1-z^2}) + C\,,\ \ z \in D = \mathbb{C} \setminus \{z = x + i\cdot 0 : |\,x\,| \ge 1\}\,.$$

Таким чином, $\arcsin z$ *є аналітичним продовженням* $\arcsin x$ *з інтервалу* $(-1;1)$ *дійсної осі на область* $D = \mathbb{C} \setminus \{z = x + i\cdot 0 : |\,x\,| \ge 1\}$ *комплексної площини.* Проведені міркування також дозволяють зробити висновок, що *множиною значень* $f(z) = \arcsin z$ *є множина*

$$E(f) = \{w \in \mathbb{C}:\ \operatorname{Re} w \in [-\pi/2; \pi/2]\}\,.$$

Графіки дійсної та уявної частин функції $w = \arcsin z$ та її модуля подані на рис. 21.



$\operatorname{Re}\arcsin z$ $\qquad$ $\operatorname{Im}\arcsin z$ $\qquad$ $|\arcsin z|$

Рис. 21

Нагадаємо співвідношення між множиною розв'язків рівняння $x = \sin y$, $x, y \in \mathbb{R}$, і дійсною функцією $y = \arcsin x$, зобразивши їх за допомогою програми Gran1 (рис. 22).

$x = \sin y$ $\qquad$ $y = \arcsin x$

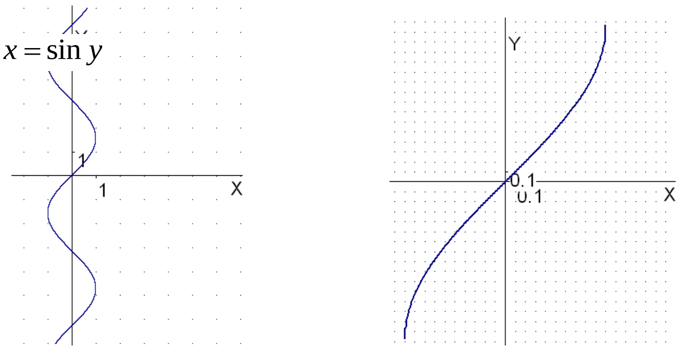


Рис. 22

**11.2.** Міркуваннями, аналогічними до проведених у пункті 11.1, можна дістати означення арккосинуса комплексного числа:

$$\arccos z = -i\ln(z + i\sqrt{1-z^2})\ \ \forall z \in \mathbb{C}\,, \tag{16}$$

а також довести твердження, що *функція* $f(z) = \arccos z$ *в області* $D = \mathbb{C} \setminus \{z = x : |\,x\,| \ge 1\}$ *є диференційовною (а тому й неперервною) і вона є первісною функції* $-1/\sqrt{1-z^2}$ *в області* $D$. *Тому*

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\arccos z + C = i\ln(z + i\sqrt{1-z^2}) + C\ \ \forall z \in D = \square \setminus \{z = x + i\cdot 0:\ |x| \ge 1\}\,.$$

Таким чином, $\arccos z$ *є аналітичним продовженням* $\arcsin x$ *з інтервалу* $(-1;1)$ *дійсної осі на область* $D = \mathbb{C} \setminus \{z = x + i\cdot 0 : |\,x\,| \ge 1\}$ *комплексної площини.* З міркувань, проведених у пункті 11.1, випливає, що *множиною значень* $f(z) = \arccos z$ *є множина* $E(f) = \{w \in \mathbb{C}:\ \operatorname{Re} w \in [0; \pi]\}$.

З того, що похідні функцій $\arcsin z$ та $-\arccos z$ однакові в області $D$, випливає, що різниця між ними є сталою: $\arcsin z + \arccos z = C$ $\ \forall z \in D$. Підставляючи в цю рівність $z = 0$, дістанемо $C = \dfrac{\pi}{2}$, тобто $\arcsin z + \arccos z = \dfrac{\pi}{2}$ $\ \forall z \in D$.

Нагадаємо співвідношення між множиною розв'язків рівняння $x = \cos y$, $x, y \in \mathbb{R}$, і дійсною функцією $y = \arccos x$, зобразивши їх за допомогою програми Gran1 (рис.23).

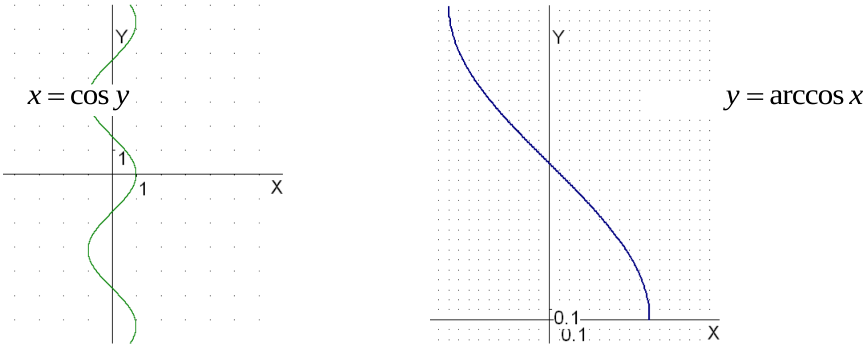



Рис. 23

**11.3.** Зафіксуємо число $z\in\mathbb{C}$ і розглянемо рівняння $\operatorname{tg} w=z$. Маємо:

$$\operatorname{tg} z=w \;\Leftrightarrow\; \frac{\exp iw-\exp(-iw)}{\exp iw+\exp(-iw)}=iz \;\Leftrightarrow\; \exp 2iw-1=iz(\exp 2iw+1) \;\Leftrightarrow$$

$$\exp 2iw=\frac{1+iz}{1-iz} \;\Leftrightarrow\; w=\frac{1}{2i}\big(\operatorname{Ln}(1+iz)-\operatorname{Ln}(1-iz)\big),$$

за умови, що $z\neq\pm i$.

Таким чином, кожне комплексне число $z\neq\pm i$ є значенням тангенса у зчисленній кількості точок $w$, тобто *множиною значень функції* $f(z)=\operatorname{tg} z$ *є комплексна площина без точок* $\pm i$. Серед усіх розв'язків рівняння $\operatorname{tg} w=z$ виділяють одне (головний розв'язок): $w=\frac{1}{2i}\big(\ln(1+iz)-\ln(1-iz)\big)$.

Оскільки для $z=x\in\mathbb{R}$ маємо:

$$w=\frac{1}{2i}\big(\ln(1+ix)-\ln(1-ix)\big)=\frac{1}{2i}\big(\ln|1+ix|+i\arg(1+ix)-\ln|1-ix|-i\arg(1-ix)\big)=$$

$$=\frac{1}{2i}\big(i\operatorname{arctg} x-i\operatorname{arctg}(-x)\big)=\operatorname{arctg} x,$$

то природно назвати *арктангенсом комплексного числа* $z\neq\pm i$ вираз $\frac{1}{2i}\big(\ln(1+iz)-\ln(1-iz)\big)$ і позначити його $\operatorname{arctg} z$. Отже,

$$\operatorname{arctg} z=\frac{1}{2i}\big(\ln(1+iz)-\ln(1-iz)\big),\; z\neq\pm i. \tag{17}$$

Рівність (17) визначає функцію $f(z)=\operatorname{arctg} z$, яку також називають *арктангенсом*. Область визначення цієї функції $D(f)=\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$, а *множина значень* $E(f)=\{w\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re} w\in[-\pi/2;\pi/2]\}$.

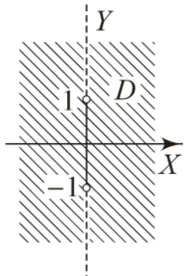



Рис. 24

Ця функція є диференційовною, а тому й неперервною у кожній точці $z=x+iy$, для якої число $1+iz\notin(-\infty;0]$, а також число $1-iz\notin(-\infty;0]$. Отже, число $z=x+iy$ повинно бути таким, щоб $1+iz\neq$ $\neq 1-y\le 0$ і $1-iz\neq 1+y\le 0 \;\Leftrightarrow\; z\neq\pm iy$, де $|y|\ge 1$. Таким чином, *функція* $\operatorname{arctg} z$ *є диференційовною, а тому й неперервною в області* $D=\mathbb{C}\setminus\{z=iy:\ y\ge 1$ *або* $y\le -1\}$.

В цій області функція $\operatorname{arctg} z$ є первісною функції

$$(\operatorname{arctg} z)'=\left(\frac{1}{2i}\big(\ln(1+iz)-\ln(1+iz)\big)\right)'=\frac{1}{2i}\left(\frac{i}{1+iz}-\frac{-i}{1-iz}\right)=\frac{1}{1+z^2}.$$

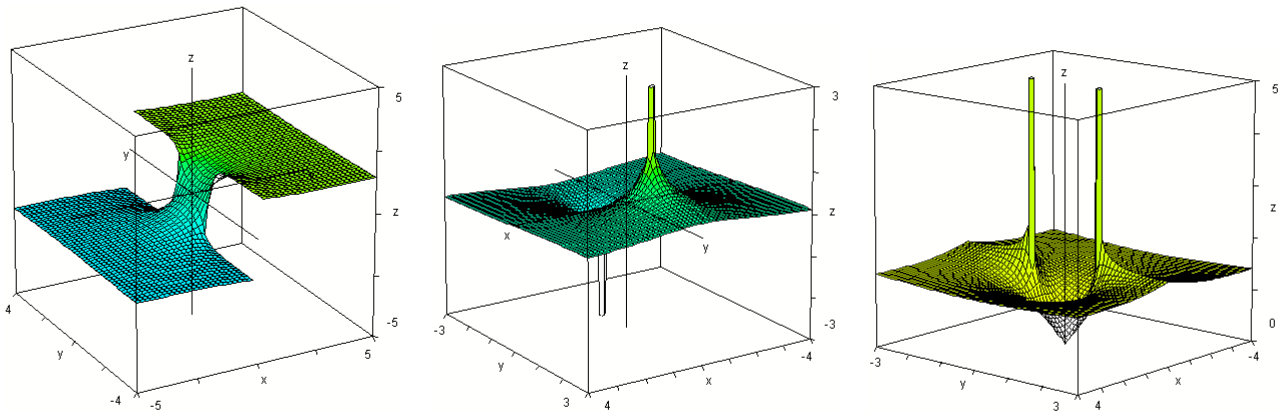
Отже,

$$\int\frac{dz}{1+z^2}=\operatorname{arctg} z+C,\; z\in D.$$

Зауважимо, що в точках $z=iy$, де $|y|\ge 1$, функція $\operatorname{arctg} z$ не є навіть неперервною, а тому подання цієї функції через степеневий ряд за степенями $z$ має круг збіжності $K=\{z:\ |z|<R\}$, де $R$ –

відстань від точки $z_0 = 0$ до межі області $D$, тобто $R = \rho(0, \partial D) = \rho(0,1) = \rho(0,-1) = 1$. Звідси й випливає відповідь на питання, чому степеневий ряд за степенями $x$ для функції $\operatorname{arctg} x$ збігається лише на проміжку $(-1;1]$. Таким чином, $\operatorname{arctg} z$ *є аналітичним продовженням* $\operatorname{arctg} x$ *з дійсної осі на область* $D = \mathbb{C} \setminus \{z = iy : \ |y| \geq 1\}$ *комплексної площини.*

Поверхні, побудовані за допомогою Derive, що пов'язані з функцією $\operatorname{arctg} z$, подані на рис. 25.

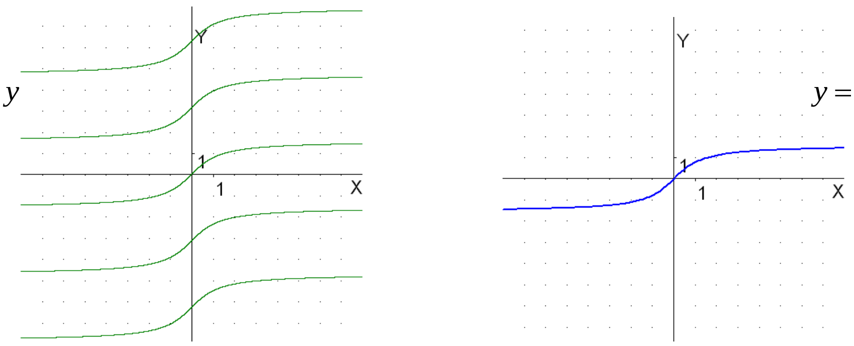


$\operatorname{Re} \operatorname{arctg} z$ $\qquad$ $\operatorname{Im} \operatorname{arctg} z$ $\qquad$ $|\operatorname{arctg} z|$

Рис. 25

Нагадаємо співвідношення між множиною розв'язків рівняння $x = \operatorname{tg} y$, $x, y \in \mathbb{R}$, і дійсною функцією $y = \operatorname{arctg} x$, зобразивши їх за допомогою програми Gran1 (рис. 26).

$x = \operatorname{tg} y$




$y = \operatorname{arctg} x$

Рис. 26

**11.4.** Міркуваннями, аналогічними проведеним у пункті 11.3, можна дістати означення *арккотангенса комплексного числа* $z \neq \pm i$ *:*

$$\operatorname{arcctg} z = \frac{1}{2i}\left(\ln(z+i) - \ln(z-i)\right) \quad \forall z \neq \pm i, \tag{18}$$

а також довести твердження, що *функція* $f(z) = \operatorname{arcctg} z$ *визначена в області* $D(f) = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ $D(f) = \square \setminus \{\pm i\}$, *має множину значень* $E(f) = \{w \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} w \in [0; \pi]\}$, *а в області* $D = \{z = iy : \ |y| \geq 1\}$ *є диференційовною, а отже, й неперервною. Ця функція є первісною для функції* $-\dfrac{1}{1+z^2}$ *в області* $D$ *і отже,*

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = -\operatorname{arcctg} z + C, \ z \in D.$$

Таким чином, $\operatorname{arcctg} z$ *є аналітичним продовженням* $\operatorname{arcctg} x$ *з дійсної осі на область* $D = \{z = iy : \ |y| \geq 1\}$. При виведенні рівності (18) з'ясовується, що *множиною значень функції* $\operatorname{ctg} z$ *є вся комплексна площина без точок* $\pm i$.

Оскільки в області $D$

$$(\operatorname{arctg} z + \operatorname{arcctg} z)' = \frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{1+z^2} = 0,$$

то $\operatorname{arctg} z + \operatorname{arcctg} z = const \quad \forall z \in D$. Враховуючи, що

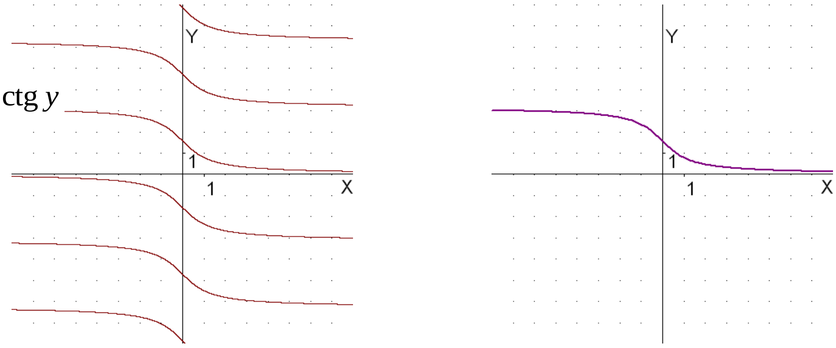
$$\operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arcctg} 0 = \frac{1}{2i}\left(\ln 1 - \ln 1 + \ln i - \ln(-i)\right) = \frac{\pi i}{2i} = \frac{\pi}{2},$$

дістаємо зв'язок між арктангенсом і арккотангенсом:

$$\operatorname{arctg} z + \operatorname{arcctg} z = \frac{\pi}{2} \quad \forall z \in D = \{z = iy:\ y \geq 1 \text{ або } y \leq -1\}.$$

Нагадаємо співвідношення між множиною розв’язків рівняння $x = \operatorname{ctg} y$, $x, y \in \mathbb{R}$, і дійсною функцією $y = \operatorname{arcctg} x$, зобразивши їх за допомогою програми Gran1 (рис. 27).

$x = \operatorname{ctg} y$




$y = \operatorname{arcctg} x$

Рис. 27

**12. Гіперболічні та обернені гіперболічні функції.** З означень $\cos z$ та $\sin z$ (див. властивість 10) зокрема випливає, що

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{\exp iz + \exp(-iz)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\exp iz - \exp(-iz)}{2i}\right)^2 =$$

$$= \frac{(\exp iz)^2 + 2 + (\exp(-iz))^2 - (\exp iz)^2 + 2 - (\exp(-iz))^2}{4} = 1.$$

Отже, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \ \forall z \in \mathbb{C}$. У випадку дійсного параметра $t$ системою функцій $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in (-\pi; \pi]$, визначається коло $x^2 + y^2 = 1$. Саме тому функції синус та косинус, тангенс і котангенс називають *круговими функціями.* З ними тісно пов’язані так звані *гіперболічні функції:*

$$\operatorname{ch} z = \frac{\exp z + \exp(-z)}{2} \ \text{– \textit{косинус гіперболічний} } z,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{\exp z - \exp(-z)}{2} \ \text{– \textit{синус гіперболічний} } z,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \ \text{– \textit{тангенс гіперболічний} } z,$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \ \text{– \textit{котангенс гіперболічний} } z.$$

Легко бачити, що $\operatorname{ch} iz = \cos z$, $\operatorname{sh} iz = i \sin z$, $\operatorname{sh} z = -i \sin iz$, $\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz$, $\operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz \in \mathbb{C}$. Тому $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = \cos^2 iz + \sin^2 iz = 1$. Отже, $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1 \ \forall z \in \mathbb{C}$. У випадку дійсного параметра $t$ системою функцій $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$, $t \in (-\infty; +\infty)$, визначається гіпербола $x^2 - y^2 = 1$. Саме цим пояснюється назва гіперболічних функцій.

Знайдемо дійсну та уявну частину і модуль кожної з гіперболічних функцій за допомогою Maxima.

| Команда | Результат |
|---|---|
| (%i1) rectform(cosh(x+%i*y)); | (%o1) $\operatorname{ch} x \cos y - i \operatorname{sh} x \sin y$ |
| (%i2) rectform(sinh(x+%i*y)); | (%o2) $\operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$ |
| (%i3) rectform(tanh(x+%i*y)),factor; | (%o3) $\frac{i \sin(2y) + \operatorname{sh}(2x)}{\cos(2y) + \operatorname{ch}(2x)}$ |
| (%i4) realpart(coth(x+%i*y)),trigsimp,factor,trigreduce,factor; | (%o4) $-\frac{2 \operatorname{sh}(2x) \cos(2y) + \operatorname{sh}(4x)}{\cos(4y) - \operatorname{ch}(4x)}$ |
| (%i5) imagpart(coth(x+%i*y)),trigsimp,factor,trigreduce,factor; | (%o5) $\frac{\sin(4y) + 2 \operatorname{ch}(2x) \sin(2y)}{\cos(4y) - \operatorname{ch}(4x)}$ |
| (%i6) abs(cosh(x+%i*y)),trigreduce,factor | (%o6) $\frac{\sqrt{\cos(2y) + \operatorname{ch}(2x)}}{\sqrt{2}}$ |
| (%i7) abs(sinh(x+%i*y)),trigreduce,factor | (%o7) $\frac{\sqrt{\operatorname{ch}(2x) - \cos(2y)}}{\sqrt{2}}$ |

| Команда | Результат |
| --- | --- |
| (%i8) abs(tanh(x+%i*y)),trigreduce,factor | (%o8) $\sqrt{\dfrac{\mathrm{ch}(2x)-\cos(2y)}{\cos(2y)+\mathrm{ch}(2x)}}$ |
| (%i9) abs(coth(x+%i*y)),trigreduce,radcan; | (%o9) $\dfrac{\sqrt{\cos(2y)+\mathrm{ch}(2x)}}{\sqrt{\mathrm{ch}(2x)-\cos(2y)}}$ |

Графіки наведених в останній таблиці функцій схожі на графіки, розглянуті в пункті 9.

Аналогічно до того, як введено обернені тригонометричні функції, можна ввести *обернені гіперболічні функції:*

$$\mathrm{arsh}\, z=\ln(z+\sqrt{z^2+1})$$ – *ареасинус гіперболічний,*

$$\mathrm{arch}\, z=\ln(z+\sqrt{z^2-1})$$ – *ареакосинус гіперболічний,*

$$\mathrm{arth}\, z=\frac{1}{2}\big(\ln(1+z)-\ln(1-z)\big)$$ – *ареатангенс гіперболічний,*

$$\mathrm{arcth}\, z=\frac{1}{2}\big(\ln(z+1)-\ln(z-1)\big)$$ – *ареакотангенс гіперболічний,*

а також визначити області, у яких ці функції є диференційовними і неперервними.

Наведемо графіки дійсних гіперболічних та обернених гіперболічних функцій, виконані за допомогою програми Derive (рис. 28).

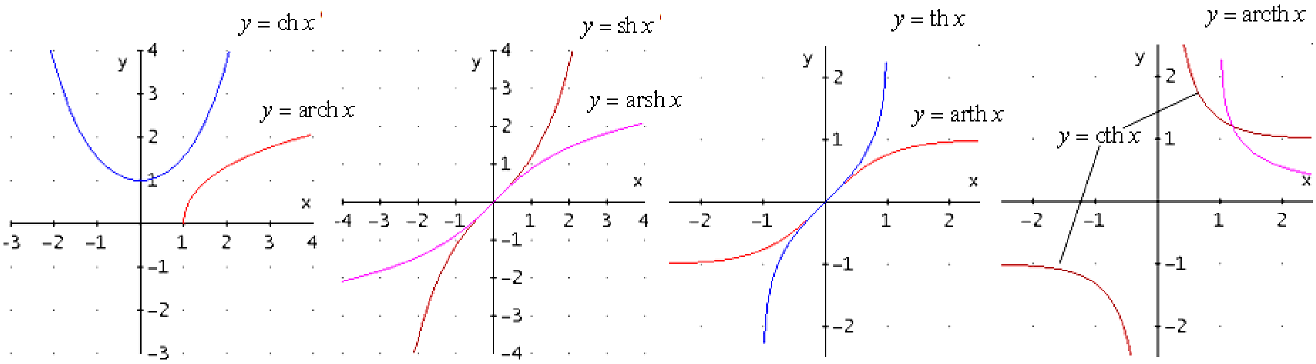



Рис. 28

**13. Елементарні функції дійсної та комплексної змінної у комп'ютерних засобах математики.** Наведені факти стосовно експоненти і натурального логарифма свідчать про їх особливу значущість для математики. По суті ***основними елементарними функціями є стала, експоненціальна і логарифмічна*** функції. Усі інші *елементарні функції* утворюються з цих трьох за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій та суперпозицій. Вище це проілюстровано для степеневих, тригонометричних, обернених тригонометричних, гіперболічних та обернених гіперболічних функцій.

*Загальна показникова функція* $f(z)=a^z$, $z\in\mathbb{C}$, визначається рівністю $a^z=\exp(z\ln a)$, де $0\neq a\neq 1$ – фіксоване число (дійсне або комплексне), а $z$ – довільне комплексне (або дійсне) число. Зокрема, за означенням $e^z=\exp z$, звідки випливає *зв'язок між числами* $e$ *та* $\pi$: $e^{i\pi}+1=0$. Остання рівність вважається однією з найкрасивіших математичних формул.

*Загальна логарифмічна функція* $f(z)=\log_a z$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, визначається рівністю $\log_a z=\dfrac{\ln z}{\ln a}$, де $0\neq a\neq 1$ – фіксоване комплексне (зокрема, дійсне) число, а число $z\neq 0$ – довільне комплексне (зокрема, дійсне) число.

У різноманітних системах комп'ютерної математики функціям дійсної та комплексної змінної приділено достатню увагу. Можна стверджувати, що основним класом функцій, що використовуються в усіх математичних комп'ютерних програмах, є елементарні функції (дійсної і комплексної змінної)). Відомості про елементарні функції закладено вже у мови програмування (Basic, Pascal, Delphi, Lisp та ін.).

Використовуючи математичні програми, такі як Derive чи Maxima, про які йшла мова вище, можна проводити різноманітні символьні обчислення з елементарними (і не лише елементарними) функціями. Використання цих програм дозволяє: виконувати операції з раціональними числами у вигляді точних звичайних (а не наближених десяткових) дробів; одержувати точні результати обчислень, які містять число $e$, число $\pi$, $\ln 2$, $\sqrt{3}$, $\cos 1$, $\arcsin(1/3)$ тощо, а потім за потреби наближено переобчислювати ці результати у вигляді десяткових дробів; проводити спрощування раціональних, показникових, логарифмічних і тригонометричних виразів; виконувати операції математичного аналізу (обчислення границь, диференціювання, відшукання первісних і визначених інтегралів); працювати з комплексними числами та функціями комплексної змінної і багато іншого. Наприклад, якщо обчислити вираз $e^{i\pi}+1$ за допомогою Derive, то отримаємо $0$. Програма Derive з 90-х років минулого століття широко використовується у школах і вузах багатьох країн Європи і Америки.

Програма Maxima в порівнянні з Derive містить ширший арсенал засобів обчислень в галузі алгебри й математичного аналізу, що дозволяє гнучкіше налаштовувати процес перетворень. Разом з тим іноді за допомогою більш простої системи Derive можна розв'язати задачу ефективніше, ніж за допомогою системи Maxima. Взагалі ж можливості використання тієї чи іншої комп'ютерної системи суттєво залежать від рівня оволодіння цією системою, а ще більше від загального математичного рівня користувача.

**14. Висновки.** 1. У передмові широко відомої книги [11] один з авторів Ф. Емде писав, що графічне подання функцій комплексної змінної значно полегшує їх опанування. Якщо раніше можна було лише мисленно аналізувати і сполучати розрізнені й незалежні властивості таких функцій, то при наявності графіків дійсної та уявної частин і модуля функції комплексної змінної набагато легше поєднати всі її властивості у єдине осяжне ціле. На це варто звертати увагу авторам підручників.

До появи комп'ютерних засобів математики побажання Ф. Емде виявилися нездійсненними, а зараз їх може втілити у життя кожен викладач математики.

2. Загальний погляд на математичну проблему часто допомагає не тільки полегшити розв'язання цієї проблеми, а й одержати значно сильніший результат. Обґрунтоване використання сучасних комп'ютерних засобів математики, з одного боку, дозволяє унаочнити подання найабстрактніших математичних фактів (що раніше, до появи таких комп'ютерних засобів, було практично неможливим). З іншого боку таке обґрунтоване використання дозволяє виявити можливі недоречності в існуючих комп'ютерних засобах математики. На все це слід звертати увагу майбутніх учителів математики в процесі навчання математичних дисциплін.

### Література


1. *Давидов М. О.* Курс математичного аналізу. Ч. 1. – К.: Вища школа, 1990. – 384 с.
2. *Давидов М. О.* Курс математичного аналізу. Ч. 3. – К.: Вища школа, 1992. – 360 с.
3. *Дороговцев А. Я.* Математический анализ. – К.: Факт, 2004. – 558 с.
4. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. – М.: Наука, 1978. – 416 с.
5. *Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н., Шевкин А. В.* Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 кл. – М.: Просвещение, 2005. – 400 с.
6. *Шкіль М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М.* Алгебра і початки аналізу: 10 клас. – К.: Освіта, 2000. – 318 с.
7. *Шкіль М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М.* Алгебра і початки аналізу: 11 клас. – К.: Освіта, 2001. – 311 с.
8. *Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубінчук О. С.* Алгебра і початки аналізу: 10-11 класи. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 608 с.
9. *Дьяконов В. П.* Системы компьютерной алгебры Derive: Самоучитель и руководство пользователя. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 320 с.
10. *Семеріков С. О.* Maxima 5.13: довідник користувача / За ред. академіка НАПН України М.І. Жалдака. – Київ, 2007. – 48 с.
11. *Янке Е., Эмде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми. – Москва, Ленинград: Гос. изд-во тех.-теор. лит., 1949. – 420 с.