Раков С.А.
доктор педагогічних наук,
професор кафедри інформатики ХНПУ ім. Г.С.Сковороди
Горох В.П.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
провідний спеціаліст відділу наукового забезпечення
Українського центру оцінювання якості освіти
Еркі Пеконен
професор педагогічного інституту
університет м. Хельсінкі (Фінляндія)

Дослідницький підхід з ікт-підтримкою на урокахматематики у фінляндії і в україні

(Рефлексія на відвідування уроків в основній школі)

Міфи і реальний стан використання ІКТ на уроках математики у Фінляндії і в Україні

Схоже на те, що міфи про комп'ютери у людському бутті ніколи не минуть.

Ми не можемо уявити власного життя без ІКТ (персональні комп'ютери, ноутбуки, лептопи, Інтернет, мобільні телефони, …) і продовжуємо дебатувати про доцільність використання комп'ютерних математичних систем (КМС)[1] у математичній освіті.

Ми можемо не звертати уваги на ці сумніви – час все поставить на свої місця (можна звернутися до аналогії з калькуляторами і сумнівам щодо доцільності або навіть шкідливості їхнього використання на уроках математики). Проте задача педагогічних досліджень полягає у тому, щоб вивчати важливі явища і намагатися вчасно розкривати їхній педагогічний потенціал для суспільства і освітянської спільноти для того, щоб сприяти вибору ефективної освітньої політики.

Феномен використання КМС у математичній освіті обріс багатьма міфами, але найбільш поширений серед них стосується «комп'ютерного інтелекту»: «*комп'ютеру під силу» розв'язання будь-якої математичної задачі шкільного курсу, а отже, учні, які використовують КМС, перетворюються в «кнопкодавів» і не розвивають своїх інтелектуальних, творчих здібностей. Вчителі, які поділяють таку думку, кажуть, що саме вони «розвивають мозок», вчать учнів мислити, а ті вчителі, які використовують КМС, у кращому випадку, вчать використанню ІКТ.*

Насправді комп'ютер є найбільш виразним прикладом неінтелектуальності: він «може» розв'язувати задачі тільки за відомими алгоритмами; комп'ютер не може нічого робити за асоціаціями, за інтуїцією, що притаманне саме людському інтелекту[2]. Проте комп'ютер «може» так якісно розв'язувати задачі за алгоритмами, що винайдені людським інтелектом, як не може цього зробити людина: за швидкістю, точністю, виразністю представлення результуючих даних. Все це дає можливість насправді підвищити потужність людського інтелекту в математиці і не тільки у математиці. Людський інтелект і ІКТ (КМС у контексті статті) збагачують і підвищують потужність один одного; більш за те, людський інтелект і ІКТ не можуть бути продуктивними у сучасному світі один без одного і таким чином можна говорити деякою мірою про ефективність симбіозу людського інтелекту і ІКТ (математиків і КМС у контексті статті).

Інший важливий педагогічний аспект використання КМС відбиває добре відомий педагогічний принцип: найкращий спосіб навчитися чого – навчити цього когось іншого. Створення комп'ютерної програми для розв'язування будь-якої задачі означає пристосування комп'ютера до розв'язування цієї задачі. Для учня (студента) це означає не просто розв'язати задачу, але й розв'язати її настільки якісно і осмислено, щоб «навчити» цього найбільш неінтелектуального учня – комп'ютер, тобто настільки уяснити, прояснити, структурувати і формалізувати задачу, щоб алгоритм розв'язування задачі став «зрозумілим» для комп'ютера. У цьому полягає головна ідея використання КМС у

[1] До КМС відносять комп'ютерні пакети, які призначені для розв'язування математичних задач за допомогою точних (символьних) або наближених методів, причому для опису задач та їх параметрів використовується математичний інтерфейс, а алгоритми розв'язування типових задач зберігаються у самому пакеті. КМС бувають різних типів: пакети комп'ютерної алгебри, за допомогою яких виконують символьні обчислення, у тому числі і точні обчислення; системи наближених обчислень, в яких «зашиті» методи наближених обчислень, графічні пакети для побудови графічних образів математичних конструкцій, пакети динамічної геометрії для побудови динамічних графічних моделей, параметрами яких можна управляти, тощо. Більшість КМС об'єднують у собі зразу кілька функцій (Maple, Mathematica, MathCAD, MATLAB, Derive тощо) і створювалися для професійної математичної роботи, але з часом вони все більше і більше проникають у математичну освіту. Пакети динамічної геометрії стоять окремо (Cabri, Sketchpad, Cinderella, GEONExT, DG, Gran-2D, Gran-3D тощо) і набули широкого застосування в освіті завдяки багатьом обставинам: наочності і природності інтерфейсу, взаємному збагаченню геометрії та інформатики (комп'ютерної графіки, обчислювальних потужностей комп'ютера, що дозволяє маніпулювати геометричними образами).

[2] Таким чином, якщо кожну або більшість задач підручника можна розв'язати автоматично за допомогою комп'ютера, то це означає, що підручник не вчить творчого мислення, а націлений на тренінг з розв'язування задач за відомими алгоритмами, шаблонами.

математичній освіті: «учіння через навчання[3]», перетворення учня на «вчителя комп'ютера» – в конструктора, розробника автомата для автоматичного (або автоматизованого) розв'язування задач.

Інший міф стосовно використання КМС на уроках математики відображає деякою мірою протилежну до першого міфу точку зору і стосується побоювань про складність використання КМС у навчанні. Зрозуміло, як і у першому випадку, це також має кілька слушних аргументів, проте ІКТ-грамотність так швидко зростає і вже зараз вона не є проблемою для більшості молоді, а з іншого боку, настільки швидко прогресує «інтелектуальність» інтерфейсу КМС, його природність, прозорість, люб'язність, що головним в ефективному використанні КМС стає саме математична грамотність (математична культура, компетентність тощо). Зрозуміло, справжня ера ІКТ в освіті, зокрема ера КМС у математичній освіті, настане пізніше, разом з ерою реальних веб-спільнот і веб-середовищ, при якій кожний учитель і кожний учень будуть мати можливість користуватися своїми лептопами у кожний момент свого життя. Причому, не просто лептопа, а лептопа, під'єднаного до мобільного Інтернету для використання всіх відомостей накопичених людством, з реальною і зручною можливістю створювати реальні багатофункціональні освітні спільноти з розподіленням програмних та інформаційних ресурсів і використанням будь-яких засобів комунікацій. Зрозуміло, такий лептоп буде мати багато інстальованих пакетів, зокрема КМС, які будуть адаптовані до потреб учнів і самоналаштовуватися на їхній рівень розвитку. Ми навіть ще не можемо уявити всіх можливостей, які зможуть перевести освіту на якісно інший рівень, що прийде на зміну класно-урочної системи – системи освіти епохи книгодрукування як головного інструменту зберігання і передавання відомостей.

Особливим питанням є доступність (у тому числі і цінова) комп'ютерних математичних систем. На даний момент є деяка кількість безкоштовних пакетів з достатньо високими характеристиками (наприклад, пакет динамічної геометрії GEONExT). Немає сумнівів, що широке використання КМС зробить більшість КМС доступними за ціною.

Але чому математичні пакети не знаходять широкого використання у школах ні в Україні, ні у Фінляндії – країнах з достатньо різними освітніми парадигмами освіти взагалі і математичної освіти зокрема, з різними культурами і традиціями, з різним рівнем ІКТ-інфраструктури системи освіти? Це серйозне питання і у авторів немає аргументованої докладної відповіді на це запитання. Єдине, що для нас є зрозумілим, це те, що у освітян є багато роботи у цьому напрямі: і дидактам, і викладачам педагогічних університетів, і вчителям, управлінцям системи освіти, методистам, науковцям, розробникам КМС, щоб глибше уяснити собі можливості використання ІКТ в освіті, зокрема можливості використання математичних пакетів для вдосконалення системи математичної освіти з ІКТ-підтримкою і допомогти вчителям і учням опанувати можливостями використання КМС, перетворити навчання математики у більш творчий, продуктивний і захоплюючий процес.

Ідея цієї статті виникла з відвідувань уроків математики у школах Фінляндії і України у рамках підготовки спільного порівняльного українсько-фінського проекту MAVI-A (Погляди учнів на математику і навчання математики і їх кореляція з рівнем успішності навчання математики). Проект MAVI-A поглиблює порівняльне українсько–фінське дослідження поглядів на математику та навчання математики учнів 8 класів, яке було виконане у рамках Міжнародного дослідження MAVI [1]. Під час відвідувань уроків[4] ми, на жаль, не побачили використання математичних пакетів, тим більше використання КМС для підтримки дослідницького підходу у навчанні математики, навіть в умовах якісного оснащення класів засобами ІКТ та вільного володіння вчителем цими засобами. Цікаво проаналізувати задачі і методи, що використовувались на цих реальних уроках з точки зору можливостей продуктивного використання КМС для підтримки дослідницького підходу в навчанні і ця рефлексія і є змістом статті. Підкреслимо, що відвідані уроки були якісними уроками, і автори статті не ставили за мету надати поради щодо їх удосконалення – учитель є єдиним конструктором і творцем своїх уроків, і йому вирішувати, як уроки проводити і в якій формі, і які при цьому використовувати засоби і методи навчання. Зазначимо, що на всіх відвіданих уроках без винятку ми побачили можливості ефективного використання дослідницького методу навчання з використанням КМС і цю нашу рефлексію ми спробували передати у статті з сподіванням на те, що наші думки допоможуть комусь зробити перший крок в опануванні потужностей КМС для підтримки дослідницького підходу у навчанні математики.

Ми сподіваємось, що наведені приклади можуть бути для когось цікавими і спонукають до роздумів щодо використання КМС у навчанні і вивченні математики, зокрема щодо ІКТ-підтримки дослідницького підходу в математичній освіті.

Перед обговоренням відвіданих уроків ми спробуємо окреслити основні ідеї дослідницького підходу у навчанні математики.

Дослідницький підхід у математичній освіті з ІКТ-підтримкою

Головні ідеї дослідницького підходу з ІКТ-підтримкою в математичній освіті [2]:

---

[3] Учіння розуміється у даному випадку як самостійне навчання, самонавчання; навчання – як навчання іншого (в англійській мові для цього існують різні дієслова: у першому випадку – *to learn*, у другому – *to teach*).

[4] Були відвідані уроки у чотирьох школах України і чотирьох школах Фінляндії, уроки за згодою з вчителями і учнями були записані на відео і детально проаналізовані.

– Дослідницький підхід в математичній освіті є методологією реалізації на практиці компетентнісної парадигми освіти і є педагогічною адаптацією («педагогічною проекцією») дослідницької роботи у галузі математики до математичної освіти;
– Дослідницький підхід у математичній освіті базується на ідеях проблемного підходу у навчанні, евристичних методів навчання, соціального конструктивізму тощо;
– Дослідницький підхід у математичній освіті є дуже витратним за часом і зусиллями. Для використання дослідницького підходу на практиці потрібно використання КМС для виконання більшості рутинної роботи і подання результатів обчислень у вигляді динамічних образів у зручній для дослідження формі.

Математичне дослідження включає в себе наступні етапи [3]:

- *Математизація задачі* або предметної галузі;
- *Постановка задачі* (сімейства задач);
- *Моделювання* (моделювання засобами КМС);
- *Формування гіпотези*;
- *Доведення гіпотези* (або її спростування за допомогою побудови контрприкладу до гіпотези);
- *Інтерпретація* отриманих результатів у термінах вихідної предметної галузі;
- *Застосування* (зокрема створення автоматів для розв'язування прикладних задач);
- *Систематизація* (умонтування нового знання в індивідуальну систему знань учня: пошук зв'язків з відомими фактами, узагальнення отриманих результатів, пошук аналогій, постановка нових задач тощо).

На кожному кроці математичного дослідження комп'ютерне моделювання у відповідному пакеті КМС може бути продуктивним і головною метою цієї статті є демонстрація цього на матеріалі задач відвіданих занять. Перейдемо до розгляду можливостей продуктивного використання КМС на уроках математики для підтримки дослідницького підходу у навчанні.

Урок 1. *(Україна, фізико-математична школа, урок геометрії, 9 клас; за списком у класі 28 учнів, присутні 24 учні (12 дівчаток і 12 хлопчиків), тривалість уроку 90 хвилин. Тема уроку: "Використання векторів у геометричних задачах на обчислення і доведення")*.

Перед розв'язуванням задач учитель повторив з класом основні властивості векторів, що вивчалися на попередньому уроці, після чого у режимі діалогу було відкрито і доведено необхідну і достатню умову колінеарності трьох точок.

Наступна задача обговорювалася з усім класом, після чого була розв'язана на дошці одним із учнів. Це була тільки одна з п'яти задач, які було розглянуто в аналогічній манері упродовж уроку.

Задача. *Чотирикутник ABCD є паралелограмом. Точка F ділить сторону AB у відношенні 2:3, точка G ділить діагональ AC у відношенні 1:2. Дослідити, чи лежать три точки D, G і F на одній прямій.*

Робота над цією задачею в класі звелася до технічної (алгоритмічної) перевірки того, що вектори *DG* та *DF* не є колінеарними і учні у своїй більшості успішно справилися з цим.

Коментарі до задачі з точки зору дослідницького підходу у навчанні математики з використанням ІКТ

Проаналізуємо всі кроки *дослідницького підходу у математичній освіті* у контексті цієї задачі.

Математизація проблеми (задачі)

Можливо доцільно було б навести якісь дані про виникнення цієї задачі (реальний життєвий контекст, посилання на літературу або хоч обставини, якими користувався вчитель, пропонуючи дану задачу класу). Задачу можна було б сформулювати як проблемну область (problem field) про геометричну конфігурацію у більш загальному вигляді:

Чотирикутник ABCD є паралелограмом. Візьмемо три точки: вершину D, точку F на стороні AB і точку G на діагоналі AC. Дослідити зазначену геометричну конфігурацію.

Постановка задачі

Можливо задача, яку було запропоновано вчителем виявилася б найбільш природною для класу, проте без сумніву зазначена проблема була б тільки однією з низки задач, що були б запропоновані самими учнями, наприклад: визначити величину кута *DGF* або визначити множину значень кута *DGF,* коли точка *G* пробігає вздовж діагоналі *AC.*

Цікава дискусія може виникнути щодо вихідних параметрів задачі. Задано дуже мало вихідних даних: тільки відношення, в яких ділять точки *F* і *G* сторону і діагональ паралелограма. Що це може означати? – Це означає, що в задачі йде мова не про конкретний паралелограм і навіть не про сімейство паралелограмів однієї форми (подібних паралелограмів); отримане твердження повинно бути правильним для всіх паралелограмів.

Моделювання

Паралелограм неможливо однозначно визначити за допомогою двох заданих відношень. Таким чином, слід взяти кілька додаткових параметрів для того, щоб задати паралелограм. Якщо додаткові параметри в результаті розв'язування задачі зникнуть, то тим самим буде доведено коректність постановки задачі для сімейства всіх паралелограмів. Якщо ж цього не відбудеться, то, можливо, вдасться визначити додаткові параметри на сімейство паралелограмів, для яких твердження правильне.

Цікаво відмітити, що переведення задачі на векторну мову зазначений вище крок моделювання (необхідність у визначенні додаткових параметрів) робить цей крок неявним і у цьому одночасно є перевага і недолік векторного методу.

Моделювання у даному випадку можна розуміти як пошук умови колінеарності двох векторів DG та DF в аналітичній формі і саме це було продемонстровано на уроці.

Припущення, що відповідь не залежить від форми паралелограма, означає, що задані у задачі відношення визначають колінеарність або неколінеарність векторів DG та DF. Іншими словами, це означає, що відношення, в якому точка F ділить сторону AB, визначає відношення, в якому діагональ AC ділиться точкою перетину відрізків AC і DF.

Комп'ютерне моделювання

Комп'ютерне моделювання у середовищі пакета динамічної геометрії завжди є конкретним і потребує визначення всіх початкових (вільних) параметрів моделі. З іншого боку, динамічна змінюваність параметрів геометричної моделі дає можливість досліджувати величезну кількість конкретних реалізацій моделі. В розглядуваному випадку, наприклад, можна говорити про дослідження паралелограмів будь-якої форми. Це слід постійно мати на увазі при конструюванні динамічних геометричних фігур.

На *рис. 1* зображено копію екрана, отриману з використанням пакета DG із відповідною динамічною геометричною фігурою, яка відображає трохи більш загальну постановку задачі (точка E відрізка EF може рухатися вздовж сторони AD паралелограма і таким чином використання динамічного рисунка дозволяє досліджувати вихідну задачу як окремий випадок більш загальної задачі, яку наведено на динамічному рисунку).

Формування гіпотез

Використання динамічних вимірювань і динамічних написів у пакеті DG дозволяє користувачеві експериментувати з моделлю, формувати гіпотези і перевіряти їх на великій кількості конкретних випадків. Ідея динамічної геометрії полягає в тому, що фігура зберігається в пам'яті комп'ютера не як картинка, а як алгоритм побудови цієї картинки – послідовність команд її побудови. На *рис.1* вихідні (початкові) об'єкти (точки A, B, D, E, F і G) мають форму квадратиків. Їх положення можна змінювати за допомогою миші. Таким чином, можна перевірити гіпотезу (що величина r залежить тільки від величин s і t) для різних за формою паралелограмів. Специфіка пакетів динамічної геометрії забезпечує *ефект гумової геометрії*: точка сегмента зберігає відношення, в якому вона ділить сегмент при зміні положень базових точок сегмента (його кінців), що моделює поведінку гумової нитки з вузлом при її розтягуванні. Тому при переміщенні, наприклад, точки D буде зберігатися відношення, в якому точка E ділить відрізок AD.

Доведення або спростування гіпотези

Єдина специфічна риса, яка відрізняє математику від інших наук, полягає у методі доведення справедливості тверджень — використання дедуктивного методу. Зрозуміло, моделювання і комп'ютерна експериментальна перевірка гіпотези не є дедуктивним доведенням (і не може замінити дедуктивного доведення), проте маніпулювання з комп'ютерною моделлю (динамічною геометричною фігурою) завдяки точності комп'ютерних вимірювань разом із необмеженою кількістю окремих випадків може допомогти побудувати контрприклад до гіпотези, або знайти такі регулярності, які можуть привести до ідеї дедуктивного доведення. У нашому конкретному випадку знаходженню доведення гіпотези можуть сприяти додаткові побудови, які наведено на *рис. 1*: прямі DK і CL паралельні EF. Виконуючи експерименти, можна побачити, що довжина відрізка AL залежить тільки від довжини сторони AB паралелограма, відношень s і t, після чого вже нескладно ці факти виразити аналітично.

Дійсно,

$$r=\frac{AG}{AC}=\frac{AF}{AL}=\frac{AF}{AK+KL}=\frac{AF}{AK+AB}=\frac{1}{\dfrac{AK}{AF}+\dfrac{AB}{AF}}=\frac{1}{\dfrac{AD}{AE}+\dfrac{AB}{AF}}=\frac{1}{\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{s}}.$$

Отримана формула і показує, що величина r залежить тільки від величин s і t і не залежить від параметрів, що задають паралелограм.

Інтерпретація

Інтерпретація особливо потрібна у тому випадку, коли вихідна задача була не формалізованою, більш за те – якщо це була реальна задача (real life problem) і розв'язуванню задачі передувала її математизація. У цьому випадку виникає питання адекватності об'єкта та його моделі, принаймні потрібна інтерпретація результатів у термінах вихідної предметної галузі. Проте у будь-яких випадках корисно спробувати знайти нові інтерпретації отриманих результатів в інших математичних і нематематичних галузях, нових життєвих ситуаціях.

У даному випадку, коли відповідь має таку симетричну, гармонійну форму $(\frac{1}{r}=\frac{1}{s}+\frac{1}{t})$, вже відразу відчувається, що ця краса повинна десь працювати. Дійсно, це формула для обчислення опору двох паралельно з'єднаних резисторів, або формула для обчислення загальної ємності батареї двох послідовно з'єднаних конденсаторів. Можна запропонувати учням зробити розвідку, де використовується ця формула.

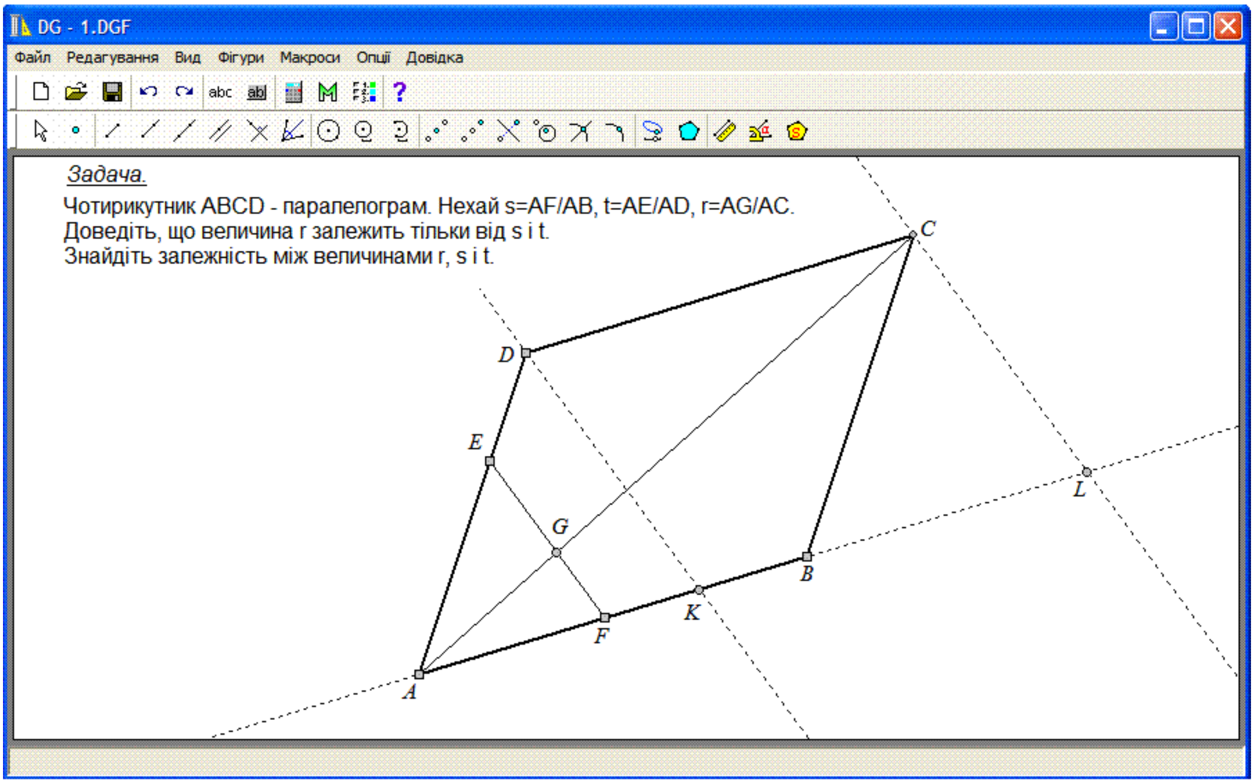

Рис. 1

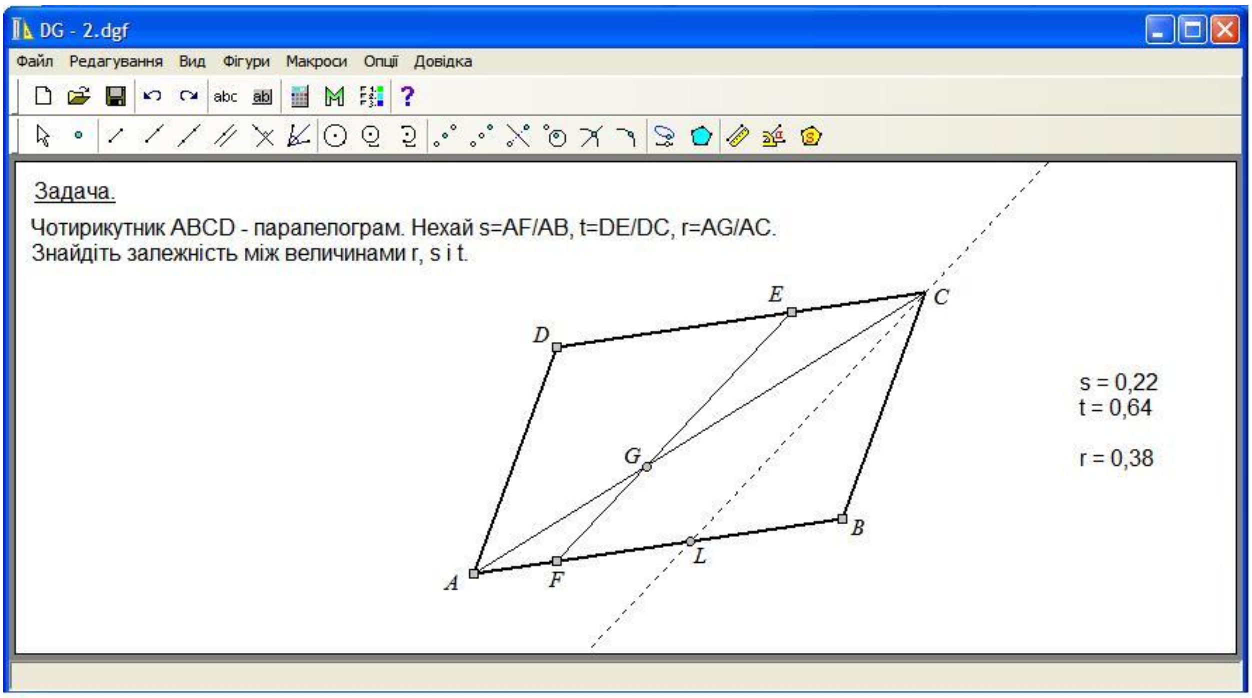

Рис. 2

Динамічне креслення, наведене на рисунку 1 можна розглядати як експертну систему для дослідження параметрів зазначених вище електричних схем.

Застосування

Одна з цілей математики – знаходити алгоритми для розв'язування типових задач (і алгоритм тим є більш універсальним, чим ширшим є коло задач, для розв'язування яких він може бути використаний). Традиційна математична освіта структурована навколо навчання використання відомих алгоритмів для розв'язування невеликого числа відомих типових математичних задач. Нові підходи до математичного курикулуму, які будуються на компетентнісних засадах, передбачають розгляд питань, як знаходити розв'язання нових, нестандартних, нетипових задач, і як раз це є суттю дослідницького підходу у навчанні математики (з використанням ІКТ або без нього). Проте після відкриття алгоритму розв'язування нової задачі є природним дослідити властивості знайденого розв'язку, а потім розробити комп'ютерну програму для автоматичного розв'язування задачі або більш широкого класу задач. Цей крок є дуже важливим завдяки своїм важливим методологічним, методичним, освітнім аспектам. Не зупиняючись на цих питаннях у даній статті, зауважимо, що створення такого комп'ютерного розв'язувача задач є дуже творчою і одночасно зрозумілою, захоплюючою задачею для учнів. Така конструктивна робота учнів у розробці (винахідництві) комп'ютерного автоматичного розв'язувача задач відображає продуктивну роботу у математиці (як у теоретичній, так і прикладній математиці), а також у галузі інформатики.

Наприкінці обговорення підкреслимо, що побудований динамічний рисунок можна використовувати як розв'язувач відповідного узагальнення вихідної задачі: користувач може задавати вихідні параметри задачі і автоматично отримувати розв'язок з досить великою точністю.

Систематизація

Цей крок дослідницького підходу є кроком рефлексії: яким чином нові знання можуть бути вмонтовані (імплементовані) в існуючу систему знань індивідума? Які зв'язки мають нові знання з вже набутою системою знань? Чи можна якось узагальнити отримані результати, знайти їм аналогії в інших галузях математики і не тільки математики? Що дають нові результати в окремих випадках?

Можна, наприклад, дослідити випадок, якщо точка F буде рухатись не тільки вздовж сторони AD паралелограма, а і вздовж сторони CD (рис. 2). Залишаємо читачеві знайти залежність між величинами r, s і t.

Цікаво ще раз повернутися до суті задачі: відношення, в яких точки E і F ділять сторони паралелограма визначають відношення, в якому ділить діагональ паралелограма точка, що є перетином діагоналі з відрізком EF. Однією з подальших продуктивних ідей може бути розміщення паралелограма у просторі та проектування його на площину і зауваження, що при такому проектуванні не будуть змінюватись відношення, в яких точки ділять відрізки. Наступний продуктивний крок – замінити вихідний паралелограм на квадрат. Розвиваючи ці ідеї, отримаємо новий підхід до нашого дослідження. Спочатку можна довести, що паралелограм будь-якої форми можна отримати як ортогональну проекцію квадрата. У цьому разі відношення, в якому точка перетину діагоналі паралелограма і відрізка, що з'єднує дві точки на сторонах паралелограма, що ділять ці сторони у заданих відношеннях, буде дорівнювати відношенню, в якому відповідна точка буде ділити діагональ квадрата. Розвиваючи далі ці ідеї, можна дійти і до основ, і до змісту проективної геометрії.

Коментарі до шкільного візиту з точки зору дослідницького підходу у навчанні з використанням ІКТ

1. Можна допустити, що запропоновані вище підходи і обговорення були б цікаві у відвіданому класі, оскільки відповідають рівню математичної культури більшості учнів (серед них – переможці олімпіад з математики та інформатики високого рівня) і їх високої вмотивованості на навчання математики. Проте для того, щоб ці підходи могли бути дійсно продуктивними на практиці, ідеї дослідницького підходу у навчанні математики повинні бути опанованими вчителями і учнями. Слід також відмітити, що ІКТ-підтримка відвіданого уроку у середовищі пакета DG була технічно здійсненна: у школі є кілька комп'ютерних класів. Проте комп'ютерні класи знаходяться у розпорядженні вчителів інформатики, уроки інформатики поглинають весь час у комп'ютерних класах.

2. Прокоментуємо питання розробки динамічних рисунків. Зрозуміло, що вчитель математики може підготувати їх заздалегідь перед уроком, однак значно цікавіше, корисніше для учнів самостійно розробити відповідні динамічні рисунки. Тут варто згадати педагогічний принцип: *вивчення (чогось) через навчання цього когось – learning by teaching*. Його можна застосувати при вивченні будь-якої галузі математики. Проте найбільш ефективно це мабуть буде при вивченні геометрії, оскільки пакети динамічної геометрії можна розглядати як комп'ютерну модель геометрії, її інтерпретацію. Це важливо на кожному рівні навчання геометрії: спочатку використання динамічних креслень буде допомагати поясненню і перевірці правильності алгоритмів побудови геометричних конструкцій. Далі геометричне моделювання у середовищі пакета DG може допомогти перетворити будь-яку математичну діяльність, зокрема пов'язану з дослідницьким підходом у математичній освіті, у більш ефективну, продуктивну, виразну тощо.

Урок 2. (*Фінляндія, загальноосвітня (нормальна) школа у передмісті м. Хельсінкі, 7 клас, урок геометрії, за списком у класі 22 учнів, присутні 19 учнів (14 дівчаток і 5 хлопчиків, тривалість уроку 90 хвилин). Тема уроку: "Геометрія. Система координат").*

Урок почався з перевірки виконання домашнього завдання: визначення точок на координатній площині за заданими координатами та обернена задача – знаходження координат заданих на координатній площині точок. При цьому активно використовувався *DocumentReader* – відеокамера на штативі, яка під'єднана до мультимедіапроектора і комп'ютера. Учителі у Фінляндії дуже ефективно використовують *DocumentReader* у навчальному процесі – у будь-який момент навчального процесу можна показати на екрані документ або модель, маніпулюючи ними та спостерігати за їхніми зображеннями на екрані.

Зазначимо, що ІКТ-забезпечення у класі було стандартним для Фінляндії: мультимедійний проектор, Інтернет, документрідер, ПК учителя і кілька ПК учнів. У ключі уроку (дослідження форм і взаємного розташування геометричних об'єктів) можна запропонувати багато різноманітних видів діяльності, а з пакетами динамічної геометрії DG ці види діяльності можуть стати суттєво більш продуктивними, ефективними, захоплюючими і таким чином більш педагогічно досконалими.

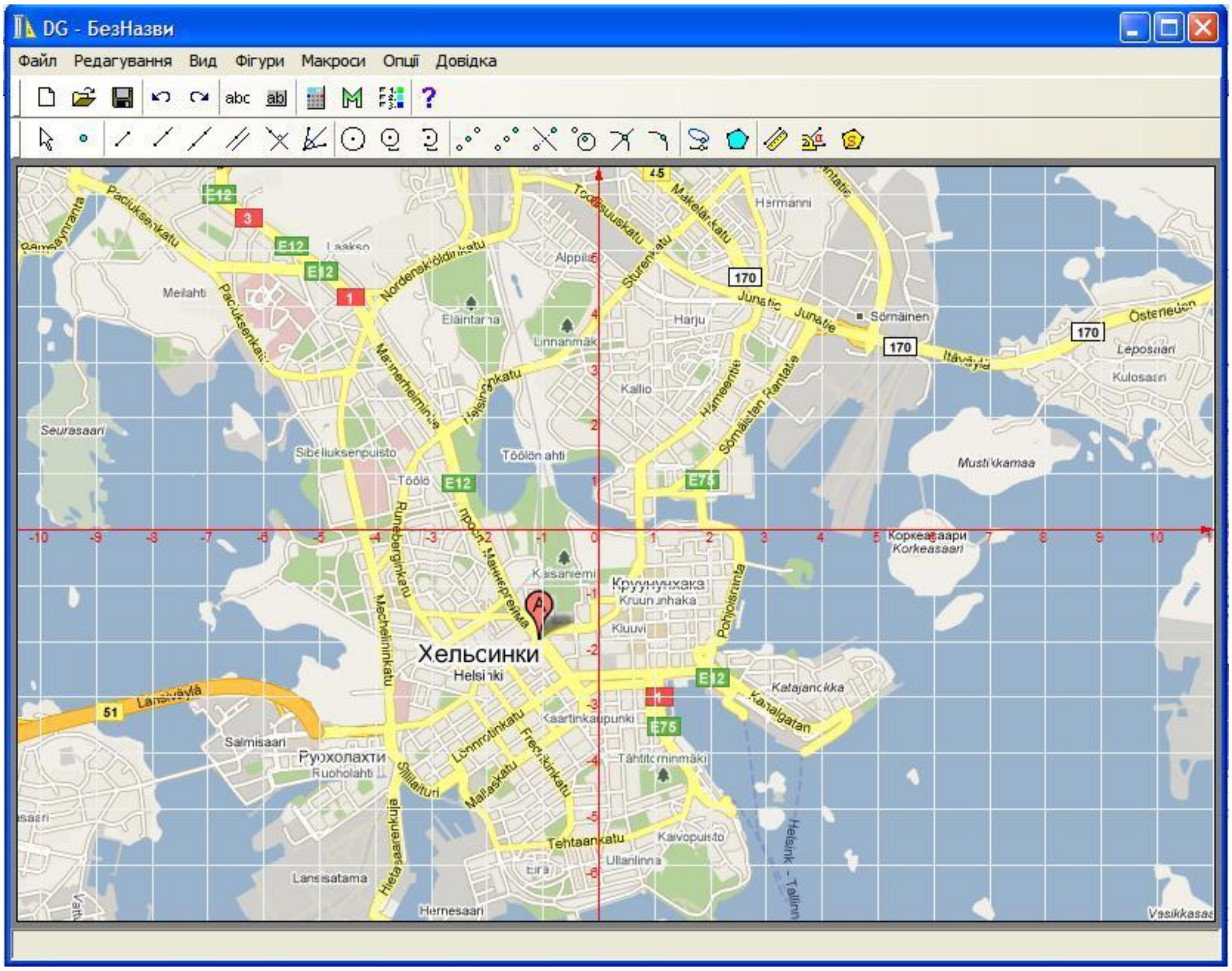

Рис. 3

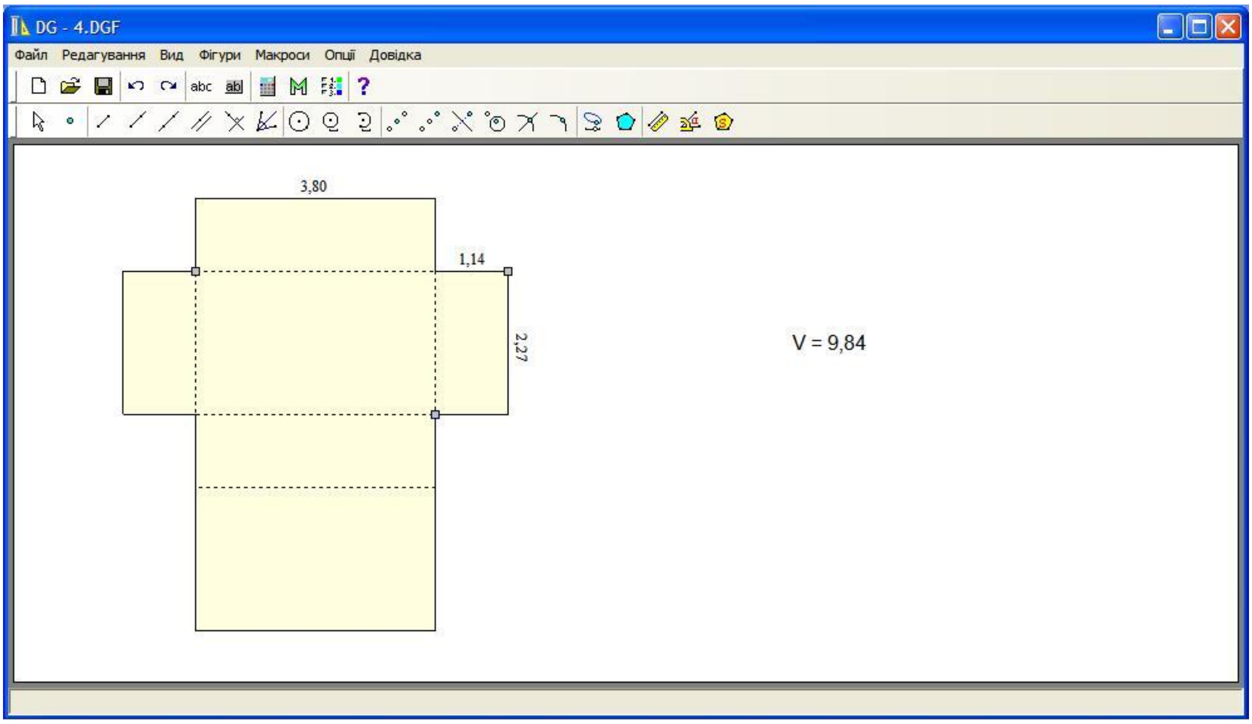

Рис. 4

На уроці вчитель продемонстрував свої ідеї щодо використанні Інтернет на уроках геометрії: через систему GoogleMap було отримано зображення з космосу центральної частини Гельсінкі і одна із задач уроку складалася в аналізі цього зображення з точки зору геометрії (форми і взаємного розташування об'єктів). Здається, що ця цікава і продуктивна ідея багато в чому би виграла з використанням пакетів динамічної геометрії. Наприклад, можна було використати карту міста в якості фонового рисунку у пакеті DG та досліджувати геометрію міста використовуючи інструменти пакета (рис. 3).

Урок 3. (*Загальноосвітня (нормальна) школа м. Ювяскюля, 9 клас, урок геометрії, за списком у класі 25 учнів, присутні 25 учнів (12 дівчаток і 13 хлопчиків, тривалість уроку 90 хвилин). Тема уроку: Геометрія. Об'єми тіл).*

Учитель навчає математики та інформатики, є автором комп'ютерної програми для побудови і дослідження графіків функцій, яку успішно використовує упродовж кількох років на уроках алгебри. На наш подив учитель висловив свою думку, що вважає за краще вивчати геометрію у традиційній формі, без використання пакетів динамічної геометрії, але виявив зацікавленість пройти тренінг за програмою "Дослідницький підхід з ІКТ-підтримкою у курсі геометрії загальноосвітньої школи". Освітнє середовище класу на дуже високому рівні: мультимедійний проектор, 16 робочих місць учнів, Інтернет, документрідер, сканери, дігітайзери тощо. Зазначимо, що школа є базовою школою університету м. Ювяскюля – одного з провідних університетів Фінляндії. Саме тут студенти університету проходять педагогічну практику. Для проведення колективних спостережень і обговорень уроків є спеціальна звукоізольована студія, яку відділяє від класу напівпрозора перегородка (зі сторони класу вона матова і непрозора, а зі студії – прозора; мікрофон у класі дозволяє у студії створювати повну ілюзію присутності у класі).

У процесі підготовки до уроку учні зробили паперові моделі різних геометричних тіл: конусів, пірамід, зрізаних конусів та зрізаних пірамід, паралелепіпедів, циліндрів, напівциліндрів тощо. Цікава ізюминка завдання – об'єми всіх моделей повинні якомога точніше дорівнювати двом літрам.

На уроці використовувались різні типи діяльності: демонстрація виготовлених моделей з обговоренням, як будувалися їх розгортки. При цьому активно використовувався документрідер. Після цього у малих групах розв'язувалися різні задачі, однією з яких було вимірювання з максимально високою точністю об'ємів моделей сконструйованих геометричних тіл (при цьому учні мінялися своїми моделями).

Зауважимо, що для конструювання розгорток многогранників зручно використати пакет динамічної геометрії. На рисунку 4 наведено динамічний рисунок для конструювання розгортки прямокутного паралелепіпеда заданого об'єму. Використовуючи динамічний рисунок, можна змінювати параметри моделі та обчислювати її характеристики. Уявляється, що для учнів було б цікавим створення аналогічних експертних систем для моделювання всіх тіл, що вивчаються в шкільному курсі геометрії. Використання таких динамічних рисунків дозволяє напівавтоматично розв'язувати задачі конструювання тіл із заданими характеристиками і обчислення характеристик тіл із заданими параметрами.

Висновки

У рамках дослідження були відвідані по чотири уроки математики в основній і старшій школі у Фінляндії і в Україні, перебіг яких було записано на відео і потім детально проаналізовано. Цей аналіз утвердив авторів у думці, що одним із ключових моментів у вдосконаленні математичної освіти в обох країнах є підготовка вчителя математики за програмою «Дослідницький підхід з ІКТ підтримкою в математичній освіті». У більшості випадків для цього вже зараз існують необхідні технічні та методичні умови: достатня ІКТ- інфраструктура школи, досконалі математичні пакети, використання у математичній освіті проблемного підходу. Все це є ґрунтовною основою для запровадження дослідницького підходу у навчанні математики з використанням комп'ютерних математичних систем. В Україні підготовлені, вийшли у світ і передані до загальноосвітніх навчальних закладів програмно-методичні комплекси (ПМК) на основі серії пакетів GRAN та пакету DG, програмні, навчальні і методичні матеріали для учнів і вчителів з питань використання КМС у навчальному процесі з математики. Потрібні ще й інші кроки: підготовка програм з математики та підручників, які відповідають компетентнісній парадигмі математичної освіти, зокрема дослідницькому підходу у навчанні математики з використанням ІКТ. Проте на даному етапі, здається, що основною проблемою є підготовка вчителів у питаннях дослідницького підходу у навчанні математики з використанням відповідних КМС (перш за все пакетів динамічної геометрії та пакетів комп'ютерної алгебри). Головною метою навчальних курсів для вчителів повинно бути ознайомлення з можливостями використання математичних пакетів та науково-методичними засадами організації продуктивної діяльності учнів при навчанні математики на основі дослідницького підходу в навчанні з використанням ІКТ.

Література

1. Pehkonen E., Rakov S. Comparative Survey on Pupils Beliefs of Mathematics Teaching in Finland and Ukraine // Teaching Mathematics and Computer Science. – 2005. – 3 (1), pp. 13-33.
2. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ. – Харків: Факт, 2005. – 360 с.
3. Pehkonen E. (ed.) Use of open-ended problems in mathematical classroom. University of Helsinky. Department of Teacher Education. Research Report 176, 1997.
4. National Core Curriculum for Basic Education 2004, Finnish National Board of Education, Vammalan Kirjapano Oy, Vammala, 2004. – 320 p.
5. Математика. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. – Київ: Навчальна книга, 2003, 302 с.

6. Hemmi K., Approaching Proof in a Community of mathematical Practice (Doctoral Thesis), 2006, Department of Mathematics, Stockholm University. – 278 p.
7. Система образования Финляндии: успехи школьного обучения и «третья роль» университетов // Обзор систем образования стран ОЭСР, Центр ОЭСР – ВШЭ, 2005. – с. 8-12.