Бугаєць Н.О.
НПУ імені М.П. Драгоманова

Використання програм математичного призначення для знаходження екстремумів функцій

Діяльність людини при розв'язуванні різноманітних завдань майже завжди спрямована на відшукання найкращого або оптимального рішення. Щоб знайти найкращу із можливостей, доводиться розв'язувати задачі на знаходження максимуму чи мінімуму, тобто найбільших чи найменших значень певних величин. Обидва ці поняття – максимум та мінімум об'єднуються терміном «екстремум».

Завдяки появі таких універсальних математичних пакетів як Maple, Mathematica, Mathcad, Matlab, Maxima та ін. активізувалося використання комп'ютерної техніки та інформаційних технологій для розв'язування задач на пошук екстремумів. Ці програми оснащені зручним інтерфейсом, за їх допомогою можна реалізувати багато стандартних і спеціальних операцій і функцій, в них вбудовано потужні графічні засоби, власні мови програмування, засоби підготовки математичних текстів до друку, передбачено імпорт даних в інші програмні продукти (текстові і графічні редактори, електронні таблиці) та експорт з них даних для опрацювання. Використання математичних пакетів надає користувачам можливість розв'язувати широкий спектр задач:

- проведення математичних досліджень, де вимагаються аналітичні перетворення та числові розрахунки;
- розробка алгоритмів для реалізації чисельних методів розв'язування задач, їх аналіз і використання;
- математичне моделювання та комп'ютерний експеримент;
- аналіз і опрацювання експериментальних даних;
- візуалізація результатів дослідження, наукова та інженерна графіка, створення графічних та числових звітних матеріалів тощо.

Однією з проблем, що постають в процесі розв'язування задач з комп'ютерною підтримкою, є вибір програмного середовища. Різні системи комп'ютерної математики можуть суттєво відрізнятися за функціональністю, інтерфейсом, розміром, вбудованою мовою програмування тощо. Безальтернативне ознайомлення лише з однією з програм математичного призначення звужує клас розв'язуваних задач.

Розглянемо основні можливості використання різних програмних засобів для розв'язування задач на пошук екстремумів функцій кількох змінних.

В Maple для дослідження функцій на екстремум є кілька команд, які входять до стандартної бібліотеки даної програми.

Для знаходження мінімуму і максимуму функції від однієї чи багатьох змінних на певному інтервалі без обмежень на змінні використовуються відповідно команди:

minimize(f, vars, ranges, opts),

maximize(f, vars, ranges, opts),

де **f** – алгебраїчний вираз функції, екстремуми якої необхідно знайти;

vars – список змінних, за якими шукається мінімум чи максимум;

ranges – область визначення змінних виду *x1=a1..b1*, *x2=a2..b2*, ..., *xn=an..bn* для функції від *n* змінних.

Якщо замість опису області визначення змінної вказати *`infinity`* або інтервал $x_i = -\text{infinity}..+\text{infinity},\ \ (i=\overline{1,n})$, то за командами minimize та maximize будуть шукатися відповідно мінімуми та максимуми при всіх значеннях змінних, як на множині дійсних чисел, так і на множині комплексних чисел. Якщо ж опис змінної взагалі відсутній, то пошук екстремуму буде здійснюватися тільки на множині дійсних чисел.

opts – список необов'язкових параметрів. Наприклад, при введенні параметра *location* (або *location=true*) результат виводиться в розширеному вигляді, після значення мінімуму (максимуму) в фігурних дужках вказуються координати точок мінімуму (максимуму).

Якщо мінімум (максимум) відповідної функції не існує, або не вдається його знайти, то виводиться вираз, що відповідає заданій функції, а при наявності параметра *location* виводиться текст *location=false* і порожній список.

Для знаходження умовного екстремуму при заданих обмеженнях-рівностях в Maple використовується команда:

extrema(f, constr, vars, \`s\`),

де **f** – алгебраїчний вираз функції, екстремуми якої шукаються;

constr – обмеження на змінні у вигляді виразу або рівняння, які записуються у фігурних дужках.

Якщо обмеження задано як вираз, то воно інтерпретується як обмеження типу «=0».

Якщо обмеження відсутні, то замість них записується порожня множина {}.

vars – змінні, за якими шукається екстремум;

\`s\` – в апострофах вказується ім'я змінної, якій буде надано значення координат точки екстремуму.

Параметри *vars* і \`s\` в команді *extrema* не є обов'язковими. Якщо відсутній параметр *vars*, то пошук точок умовного екстремуму відбувається за всіма змінними, від яких залежить алгебраїчний вираз функції *f*. Але наявність списку змінних *vars* є обов'язковою, якщо використовується параметр *\`s\`*.

За даною командою реалізується метод множників Лагранжа для знаходження точок умовного екстремуму при обмеженнях рівностях, а її результатом є значення цільової функції в точках умовного екстремуму. Якщо вони існують, то на першому місці виводиться умовний мінімум, а на другому – умовний максимум.

Приклад 1. Знайти мінімум функції $f(x,\ y) = 2.5x^2 - 3.1xy + 4.6y^2 - x + 5.2y$.

Перш ніж знаходити екстремум, побудуємо її графік, щоб мати уявлення про графічний образ даної функції.

Для побудови графіків функцій в системі Maple є пакет `plots`. Перед зверненням до команд пакету треба під'єднати його за допомого службового слова `with`. Запишемо команди *plot3d* та *contourplot*, в результаті виконання яких отримаємо графічне зображення даної функції (рис.1а, 1б).

```
with(plots);
"Графік функції від 2-х змінних f(x,y)";
f:=2.5*x^2-3.1*x*y+4.6*y^2-x+5.2*y;
```

"Графік функції від 2-х змінних f(x,y)"

$$f := 2.5\,x^2 - 3.1\,x\,y + 4.6\,y^2 - x + 5.2\,y$$

```
plot3d(f,x=-20..20,y=-20..20);
"Лінії рівня функції f(x,y)";
contourplot(f,x=-0.5..0.5,y=-1..0,contours=15);
```

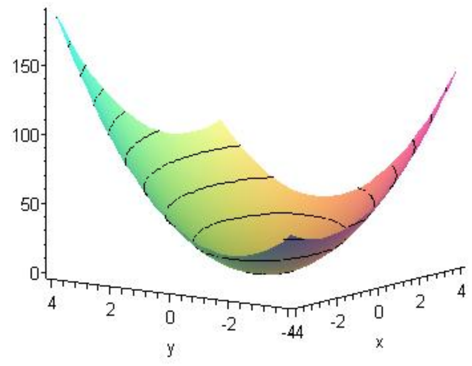

Рис. 1а

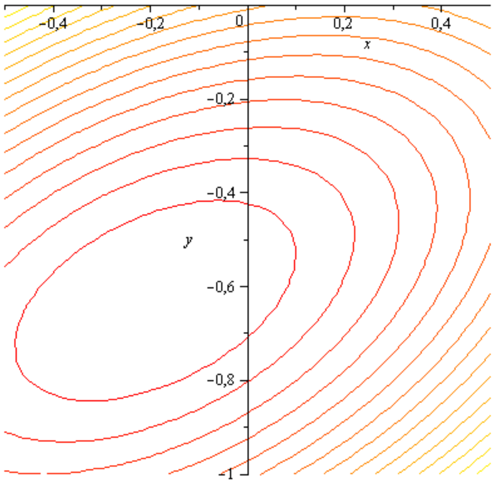

Рис. 1б

З рисунків видно, що мінімум функції знаходиться в точці з координатами в межах $x \in [-0,4;0]$ та $y \in [-0.4;-0.8]$.

Знаходимо мінімум даної функції засобами програми Maple:

```
"Мінімум функції f(x,y)";
minimize(f,location);
```

В результаті виконання записаних операторів отримуємо результат:

"Мінімум функції f(x,y)"

$$-1.541082715,\ \{[\{x = -0.1901621325,\ y = -0.6292937620\},\ -1.541082715]\}$$

Приклад 2. Знайти екстремум функції $f = e^{xy}$ при умові $x + y = a$, $a = 1, 2, 3$.

Спочатку розв'яжемо дану задачу при $x + y = 1$. Дана задача на умовний екстремум із обмеженням на змінні у вигляді рівності. Тому скористаємося командою *extrema*. Для того, щоб отримати результат у вигляді десяткового дробу, запишемо команду *evalf(a,n)*, де *a* – числовий вираз, *n* – необов'язковий параметр, який визначає число значущих цифр. В системі Maple зберігається останній результат під іменем %. Тому замість числового виразу *a* можна використати ім'я %.

```
> extrema(exp(x*y),x+y=1,{x,y},'s');
  evalf(%,5);
  s;
  evalf(%,2);
```

$$\left\{e^{\frac{1}{4}}\right\}$$

$$\{1.2840\}$$

$$\left\{\left\{x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}\right\}\right\}$$

$$\{\{x = 0.50, y = 0.50\}\}$$

Якщо в обмеженні на змінні ввести параметр, наприклад $x + y = a$, то буде видано результат у символьному вигляді:

```
> extrema(exp(x*y),x+y=a,{x,y},'s');
  s;
```

$$\left\{e^{\frac{1}{4}a^2}\right\}$$

$$\left\{\left\{x = \frac{1}{2}a, y = \frac{1}{2}a\right\}\right\}$$

Якщо вимагається знайти значення аргументів функції, при яких вона набуває найменшого (найбільшого) значення за умови виконання певних обмежень на змінні, які задані у вигляді лінійних нерівностей, то процедур із стандартної бібліотеки програми недостатньо, необхідно скористатися пакетом *simplex*. Отже, спочатку завантажується даний пакет за командою *with(simplex)*, а потім використовуються команди *minimize* чи *maximize*, які тепер будуть відрізнятися набором параметрів від аналогічних команд із стандартної бібліотеки системи Maple.

minimize(f, C, vartype),

maximize(f, C, vartype),

де **f** – вираз цільової функції,

C – обмеження на змінні у вигляді лінійних нерівностей, які записуються в фігурних дужках;

varitype – вказується тип змінних, який може набувати значення NONNEGATIVE – невід'ємні, або UNRESTRICTED – обмеження на знак змінних не накладається. Даний параметр необов'язковий, за замовчуванням він набуває значення NONNEGATIVE.

Для знаходження екстремуму функції при заданих нелінійних обмеженнях-нерівностях в Maple можна скористатися пакетом *Optimization*. В цей пакет входять функції *Minimize* та *Maximize*:

Minimize(f, constr, ranges, opts),

Maximize(f, constr, ranges, opts),

де **f** – алгебраїчний вираз заданої функції;

constr – обмеження на змінні у вигляді нелінійних рівностей чи нерівностей, які записуються у фігурних дужках через кому;

ranges – область визначення змінних у вигляді *x1=a1..b1*, *x2=a2..b2*, ..., *xn=an..bn* для функції від *n* змінних;

opts – список додаткових параметрів. Наприклад, задання параметра *assume=nonnegative* означає, що змінні набувають тільки невід'ємних значень.

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $f = x + \sqrt{y}$ при умовах $x + y \geq 1$ та $x^2 + y^2 = 1$.

Оскільки в даній задачі обмеження на змінні задано у вигляді нелінійної нерівності, то для пошуку екстремуму необхідно скористатися функціями пакету *Optimization*, який приєднується за допомогою команди *with*.

```
> with(Optimization);
f:=x+sqrt(y);
Minimize(f,{x+y>=1,x^2+y^2=1});
evalf(%,4);
Maximize(f,{x+y>=1,x^2+y^2=1});
evalf(%,4);
```

В результаті виконання даних команд отримуємо:

$$[ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve, Maximize, Minimize, NLPSolve, QPSolve]$$

$$f := x + \sqrt{y}$$

$$[1.00000000000000022, [x = 1.88277550583586302\ 10^{-16}, y = 1.]]$$

$$[1.000, [x = 1.883\ 10^{-16}, y = 1.]]$$

$$[1.57683692917470308, [x = 0.830718242667876416, y = 0.556693094354672402]]$$

$$[1.577, [x = 0.8307, y = 0.5567]]$$

В системи комп'ютерної математики зазвичай вбудовано розвинені мови програмування. Зокрема в середовищі Maple програма для знаходження мінімуму функції за методом найшвидшого спуску [2] має вигляд:

```
> restart;
f:=2.5*x^2-3.1*x*y+4.6*y^2-x+5.2*y;
"Знаходимо похідні по x та по y";
dfx:=diff(f,x);
dfy:=diff(f,y);
xprec:=solve(dfx,x):
yprec:=solve(dfy,y):
X[1]:=-1:
Y[1]:=-1:
prec:=0.01:
i:=1:
xrez:=0:
yrez:=0:
while xrez=0 do
x:=X[i]:
y:=Y[i]:
xrez:=`if`(dfx<prec,(`if`(dfx>-prec,X[i],0)),0):
yrez:=`if`(dfy<prec,(`if`(dfy>-prec,Y[i],0)),0):
X[i+1]:=`if`(dfx>0,X[i]-prec,X[i]+prec):
Y[i+1]:=`if`(dfy>0,Y[i]-prec,Y[i]+prec):
i:=i+1:
end do:
"Точні значення";
x:=xprec;
y:=yprec;
"Точка мінімуму";
x:=xrez;
y:=yrez;
"Значення функції в точці мінімуму";
f;
```

$$f := 2.5\,x^2 - 3.1\,x\,y + 4.6\,y^2 - x + 5.2\,y$$

"Знаходимо похідні по x та по y"

$$dfx := 5.0\,x - 3.1\,y - 1$$

$$dfy := -3.1\,x + 9.2\,y + 5.2$$

"Точні значення"

$$x := -0.1906000000$$

$$y := -0.6294413043$$

"Точка мінімуму"

$$x := -0.19$$

$$y := -0.63$$

"Значення функції в точці мінімуму"

$$-1.54108$$

Отже, в програму Maple вбудовано досить потужний інструментарій для дослідження функцій кількох змінних на екстремум. На основі потужної бібліотеки процедур даного програмного засобу забезпечуються умови для розв'язування широкого класу математичних задач, але в свою чергу вимагаються знання щодо запису та синтаксису команд. Хоча в цьому випадку може бути використана зручна довідкова система, характерна для Maple.

Досить популярною системою комп'ютерної математики є Mathcad. Характерною особливістю програми є використання звичних стандартних математичних позначень, тобто документ в Mathcad виглядає як звичайний математичний розрахунок. Зручності при роботі в середовищі Mathcad додає можливість введення даних за допомогою палітр математичних знаків. Але в той же час програма має обмежені засоби символьної математики.

Для розв'язування екстремальних задач за допомогою системи Mathcad використовують вбудовані функції Minimize та Maximize:

Minimize(f, var1, var2,..., varn),

Maximize(f, var1, var2,..., varn),

де **f** – ім'я цільової функції задачі;

var1, var2,..., varn – змінні, від яких залежить цільова функція.

Перед визначенням мінімуму (максимуму) функції необхідно задати цільову функцію та початкові значення змінних, від яких вона залежить.

Якщо розв'язується задача на умовний екстремум, то далі треба записати службове слово *Given*, після якого спочатку записують обмеження задачі (обмеження-рівняння, обмеження-нерівності, прямі обмеження). А далі записується команда мінімізації (максимізації) відповідно до правил синтаксису. Запис знаку «=» одразу після функції *Minimize* (*Maximize)* дозволяє автоматично отримати результат.

Результатом виконання функцій *Minimize* та *Maximize* є вектор-стовпчик, який є точним або наближеним розв'язком задачі відшукання відповідного екстремуму функції *f*.

Розв'язок задачі з прикладу 1 буде виглядати в Mathcad як на рис. 2.

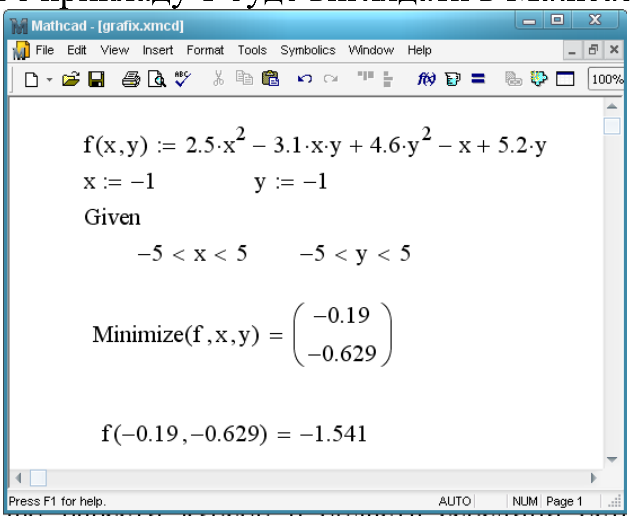

Рис. 2

Команди *Minimize* та *Maximize* використовуються і для розв'язування задач на умовний екстремум, причому обмеження можуть бути у вигляді лінійних і нелінійних рівнянь чи нерівностей.

При розв'язуванні задач нелінійного програмування в контекстному меню команд *Minimize* або *Maximize* можна обрати один з ітераційних методів пошуку екстремуму, зокрема метод лінійних наближень, метод квазіньютонівських наближень, метод спряжених градієнтів, метод квадратичних наближень.

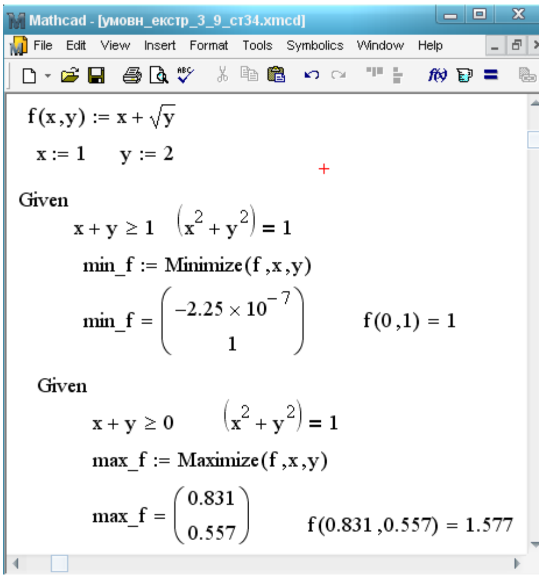

Рис. 3а

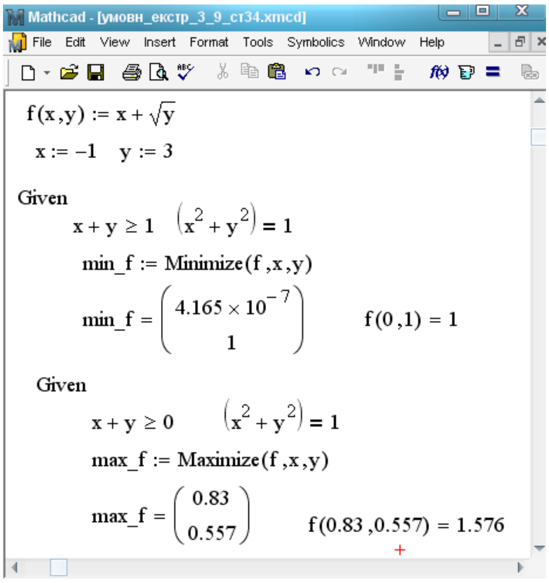

Рис. 3б

Оскільки для розв'язування екстремальних задач в системі Mathcad використовуються наближені ітераційні методи, то результат часто залежить від обраного початкового наближення. Наприклад, розв'язок прикладу 3 в Mathcad подано на рис. 3а, 3б. Як бачимо, при різних початкових наближаннях отримуються дещо різні результати.

Тому при розв'язуванні реальних задач потрібно шукати розв'язки при різних початкових даних, обов'язково аналізуючи одержані результати.

Пошук мінімуму можна організувати і за допомогою функції *Minner*. Для цього необхідно ім'я функції *Minimize* замінити на *Minner*, а після ключового слова *Given* додати вираз, за яким прирівнюється значення функції f до значення, яке завідомо менше мінімального.

Система комп'ютерної математики Maxima має низку своїх особливостей, які роблять її зручною у користуванні. А саме: можливість встановлення і використання системи з україномовним інтерфейсом, відкритість і безкоштовність, можливість функціонування під управлінням різних операційних систем, незначні вимоги до апаратних ресурсів. Причому за допомогою Maxima можна виконувати складні аналітичні операції та перетворення.

Щодо розв'язування екстремальних задач, в системі Maxima значно скромніший інструментарій у порівнянні з вище розглянутими програмами. В даній програмі є процедура *maximize_lp (minimize_lp)*, за допомогою якої можна знайти екстремум лінійної функції з обмеженнями у вигляді лінійних нерівностей.

Але в системі Maxima екстремальні задачі можна розв'язувати і за допомогою класичних методів (рис. 4).

```
/*
Знаходження екстремуму функціїі від двох змінних
                  класичним методом
(%i1) f(x,y):=2.5*x^2-3.1*x*y+4.6*y^2-x+5.2*y;
      fx:diff(f(x,y),x);
      fy:diff(f(x,y),y);
      algsys([fx,fy],[x,y]),numer;
      diff(fx,x)*diff(fy,y)-diff(fx,y)^2;
      x0:-0.19016213245397;
      y0:-0.62929376202253;
      f(x0,y0);
(%o1) f(x, y):=2.5 x^2 - 3.1 x y + 4.6 y^2 - x + 5.2 y
 (%o2) - 3.1 y + 5.0 x - 1
 (%o3) 9.199999999999999 y - 3.1 x + 5.2
 (%o4) [ [ x = - 0.19016213245397 , y = - 0.62929376202253 ] ]
 (%o5) 36.39
 (%o6) - 0.19016213245397
 (%o7) - 0.62929376202253
 (%o8) - 1.541082715031602
```

Рис. 4

Розглянуті вище математичні пакети є професійними системами, якими користуються фахівці з різних галузей для проведення автоматизованих обчислень та розрахунків.

Разом з тим професійні математичні пакети досить ефективно можуть бути використані в навчальному процесі у ВНЗ і значно менше – у середніх навчальних закладах. Тому створюються спеціальні пакети, основним призначенням яких є підтримка навчання шкільного та університетського курсів математики, використання у процесі навчання інших предметів. Ці програмні засоби досить зручні для експериментування в певній математичній галузі (алгебрі, математичному аналізі, геометрії, стереометрії, теорії ймовірності, математичній статистиці), в них передбачено низку послуг для розв'язування типових математичних задач, візуалізації абстракцій. До таких педагогічних програмних засобів відносяться зокрема Gran1, Gran2D, Gran3D, DG.

Використання послуг програми Gran1 також дає можливість графічними методами знаходити наближені розв'язки деяких задач на відшукання найбільших чи найменших значень функції однієї чи двох змінних на множинах, визначених деякими системами нерівностей (чи якимось іншим чином) [1].

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Вона описує деяку поверхню в тривимірному просторі з координатами x, y, z. Задача знаходження мінімуму функції двох змінних $f(x, y) = \min$ означає пошук найнижчої точки цієї поверхні.

Як в топографії, можна зобразити рельєф цієї поверхні лініями рівня. Зафіксуємо функцію z, тобто будемо перетинати дану поверхню $z = f(x, y)$ площинами $z = c$, де c – довільне число, взяте з множини значень даної функції. При цьому одержимо криву $f(x, y) = c$, яку називають лінією рівня (або ізокривою) функції. Інакше кажучи, лінія рівня на площині Oxy – це проекція кривої, яка утворюється при перетині поверхні $z = f(x, y)$ площиною $z = c$. Будуючи лінії рівня для різних значень c, можна дістати певне уявлення про графік функції двох змінних. Отримана картина буде нагадувати топографічне зображення рельєфу горизонталями.

Для знаходження мінімуму функції від двох змінних з прикладу 1 засобами програми Gran1 будуємо графік залежності $z = f(x, y) - c$ як неявно задану функцію зі змінними *x, y* та параметром *c*. Тобто у вікні «Список об'єктів» обираємо «Неявна $0 = G(X,Y)$», виконуємо послугу «Об'єкт/Створити» та у вікні «Введення виразу залежності» в рядок «0 = » записуємо вираз даної функції 2.5*x^2–3.1*x*y+4.6*y^2–x+5.2*y+P1, де параметр P1 відповідає параметру *c*. Змінюючи параметр P1, можна наближено встановити, в якій точці функція досягає мінімального значення, а також визначити це значення.

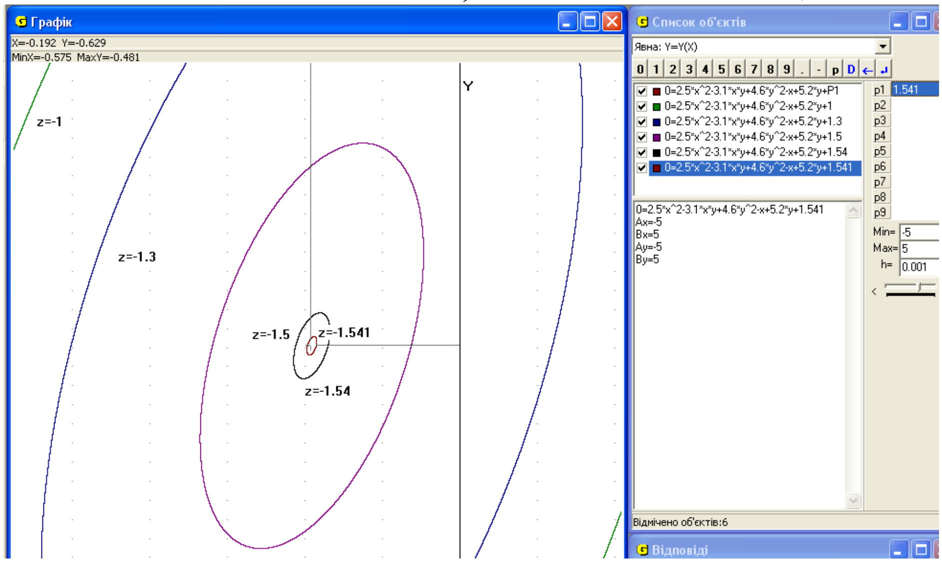

Рис. 5

Зменшуючи P1, починаючи з 1, будуємо графіки даної функції, які відповідають лініям рівня поверхні $z = f(x, y)$. Як тільки лінія графіка зникає на полі графічної області, зменшуємо на один порядок крок h, і уточнюємо значення параметра P1, значення якого і відповідає мінімальному значенню функції. Таким чином можна знайти з досить високою точністю наближене значення функції в точці мінімуму. Щоб знайти координати точки мінімуму, в Gran1 достатньо навести курсор в область, обмежену останньою лінією рівня, і зчитати значення x та y, які відображаються в рядку, над полем графічної області. (Рис. 5).

Графічним методом в Gran1 можна розв'язувати задачі і на умовний екстремум. Розглянемо розв'язок прикладу 2 (Рис. 6).

Будуємо графік залежності $f = e^{xy}$ як неявно задану функцію 0=Exp(X*Y)–P1, де P1 – довільне стале, яке відповідатиме значенню функції у відповідній точці. Графік умови $x + y = a$ також будуємо як неявно задану функцію 0=X+Y–P2, де P2 набуватиме значень 1, 2, 3. Отримуємо графіки, зображені на рис. 6.

Екстремум даної функції при заданій умові буде знаходитись на множині точок перетину цих двох графіків. Змінюючи параметр P1, помічаємо, що він набуває свого максимального значення, коли пряма $x + y = 1$ дотикається до графіка 0=Exp(X*Y)–P1. Для того, щоб знайти більш точне значення P1, зменшуємо крок h на один порядок і уточнюємо P1, змінюючи його до того значення, при якому графіки дотикаються. Уточнюючи P1 до тисячних, отримуємо максимум функції, рівний 1,284 при умові $x+y=1$. Щоб знайти координати точки максимуму в Gran, досить навести вказівник мишки на точку дотику, при цьому в лівому верхньому куті відображаються її координати. Якщо збільшити масштаб зображення, то координати відображаються більш точно (рис. 7). Отже, наближено координати точки максимуму дорівнюють $x=0{,}5$ та $y=0{,}5$.

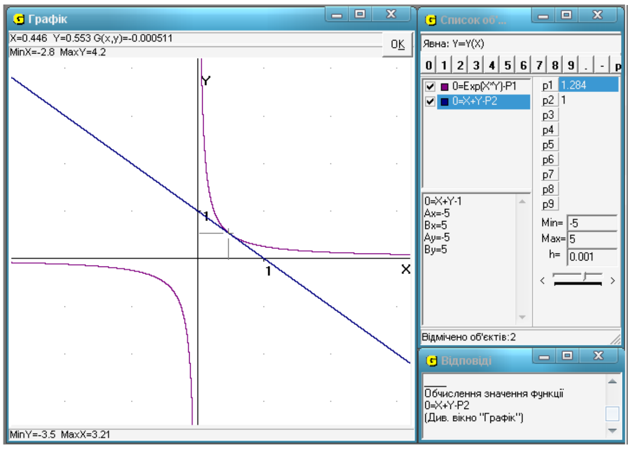

Рис. 6

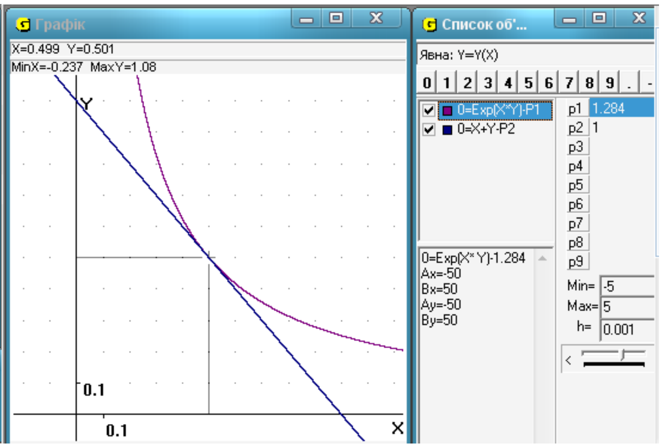

Рис. 7

Розв'яжемо приклад 3 за допомогою Gran1, користуючись графічним методом (Рис. 8а, 8б).

Побудуємо графіки залежності X^2+Y^2–1=0 та X+Y–1=0. За допомогою послуги *Операції→Нерівності→С-ма нерівностей* $G(x,y)<(>)0$ встановлюємо, що мінімум та максимум треба знаходити на множині точок меншої дуги кола, яку відтинає пряма (Рис. 8а, 8б).

Далі побудуємо графіки залежностей X+sqrt(Y)–P1=0 для різних значень параметра P1.

Слідкуючи за зміною P1, приходимо до висновку, що при заданих обмеженнях функція $f=x+\sqrt{y}$ набуває мінімального значення в точці перетину прямої та дуги з віссю Oy, а максимального значення – в точці дотику графіка X+sqrt(Y)–P1=0 та меншої дуги кола X^2+Y^2–1=0, координати яких можна наближено визначити, навівши на потрібні точки зображення вказівник мишки. Отже, мінімального значення, яке дорівнює 1, дана функція набуває в точках з координатами $x=0$ та $y=1$ (рис. 8а). А максимум, який наближено дорівнює 1.577, знаходиться в точці $x=0.83$, $y=0.55$ (Рис. 8б).

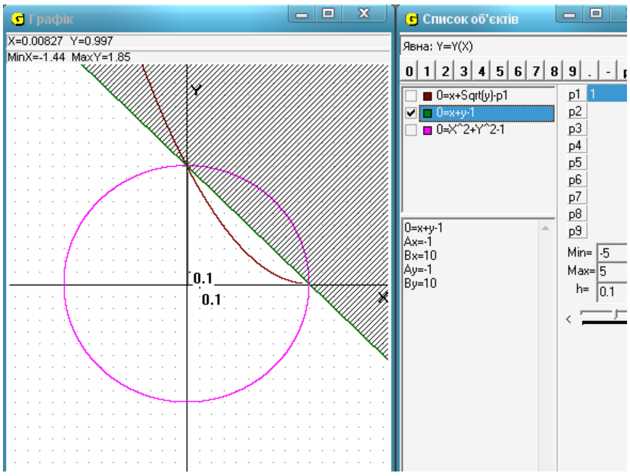

Рис. 8а

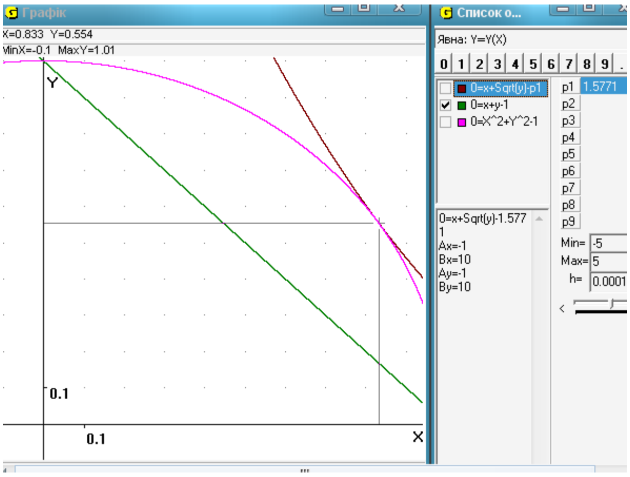

Рис. 8б

Таким чином, за допомогою Gran1 можна знайти мінімум функції з точністю, яка не поступається точності результатів, отриманих за допомогою професійних математичних пакетів. До того ж, графічні методи розв'язування екстремальних задач розвивають уяву та формують необхідні вміння та навички їх розв'язування. Розв'язуючи одну і ту саму задачу різними способами за допомогою різних математичних пакетів, можна краще зрозуміти особливості того чи іншого методу, його переваги та недоліки в залежності від змісту задачі.

Однак, слід мати на увазі, що програмою Gran1 можна скористатися тільки для розв'язування одновимірних та двовимірних задач розглянутого типу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Жалдак М.І., Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф. Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів. – К: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. – 282 с.
2. Жалдак М.І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації. Навчальний посібник. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.
3. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 624 с.