

М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, І.М. Біляй

**Про зв'язок ймовірнісних моделей
з деякими іншими моделями реального світу**

1. Вступ. Відомий американський математик Уільям Феллер вважав, [1, с. 11-12], що завдяки створеній видатним російським математиком Андрієм Миколайовичем Колмогоровим аксіоматичній теорії ймовірностей ця теорія перейшла від етапу напівмістичних міркувань, які переважали ще у 20-х роках ХХ століття, до сучасного етапу її розвитку як суто математичної теорії, що має чисельні застосування у різних галузях діяльності людей.

Ілюстрації таких застосувань у процесі навчання і самонавчання теорії ймовірностей і учнів середніх шкіл, і студентів університетів, і працюючих учителів відіграють важливу (а можливо, й вирішальну) роль, оскільки саме завдяки їм можна отримати відповідь на питання: «Навіщо це вивчати?», що суттєво підвищує мотивацію навчально-пізнавальної діяльності.

В даній статті розглядаються зв'язки ймовірнісних моделей з деякими іншими моделями реального світу: математичними, фізичними, біологічними, медичними, економічними, соціологічними.

2. Ймовірнісні моделі і комбінаторика. У роботі [2] підкреслено, що часто навчання теорії ймовірностей спрямоване на вивчення моделей лише таких випадкових експериментів, елементарні події яких рівноможливі. Таке навчання призводить до формування в учнів хибного уявлення про випадкові події та їх ймовірності. Формуванню такого хибного уявлення сприяє і підпорядкування ймовірнісних задач комбінаториці. Краще робити навпаки: вводити комбінаторні поняття і знаходити («відкривати») комбінаторні формули за допомогою побудови ймовірнісних моделей спеціального виду – лише одного із величезної кількості різноманітних видів таких моделей.

2.1. Добуток ймовірнісних моделей. На практиці часто складні стохастичні експерименти ε можна тлумачити як добуток деяких простіших експериментів ε_i , $i = 1, 2, \dots$.

Нехай експерименту ε_i відповідає ймовірнісна модель (Ω_i, S_i, P_i) , $i = 1, 2, \dots, n$.

Експеримент ε називають *добутком експериментів* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ і позначають $\varepsilon = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 \times \dots \times \varepsilon_n$, якщо кожне випробування експерименту ε є впорядкованою сукупністю випробувань, перше з яких пов'язане з експериментом ε_1 , друге – з експериментом ε_2 і т.д., останнє – з експериментом ε_n . При цьому кожен результат e експерименту ε є впорядкованою сукупністю результатів e_i експериментів ε_i , тобто $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ і ці результати складають простір $\Omega \subset \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$.

Іноді простір Ω елементарних подій e , пов'язаний з експериментом $\varepsilon = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 \times \dots \times \varepsilon_n$, співпадає з *декартовим добутком* просторів $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$, тобто $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$.

Наприклад, нехай експеримент ε_1 пов'язаний з підкиданням однокопійчаної монети, а експеримент ε_2 – з підкиданням двохкопійчаної монети і фіксацією для кожного з цих експериментів, яким боком монета впаде догори. Тоді експеримент $\varepsilon = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$ полягає у тому, що спочатку підкидають однокопійчану монету, а потім – двохкопійчану і фіксують, яким боком монета впаде догори для кожного з двох підкидань. Отже, кожен результат e експерименту ε має вигляд $e = (e_1, e_2)$, де $e_1 \in \{\Gamma_1, Ц_1\} = \Omega_1$, $e_2 \in \{\Gamma_2, Ц_2\} = \Omega_2$. Тому простір Ω елементарних подій, пов'язаний з експериментом $\varepsilon = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$, має вигляд $\Omega = \{(\Gamma_1, \Gamma_2), (\Gamma_1, Ц_2), (Ц_1, \Gamma_2), (Ц_1, Ц_2)\} = \Omega_1 \times \Omega_2$.

У найпростішому випадку, коли усі простори Ω_i скінченні (або зчисленні), а простори подій $S_i = S_i^*$ – найширші із можливих, таким самим буде і простір Ω елементарних подій та простір подій $S = S^*$. При цьому ймовірність P на просторі подій S вводять за допомогою рівності:

$$P(\{(e)\}) = P(\{(e_1, e_2, \dots, e_n)\}) = P_1(\{e_1\}) \cdot P_2(\{e_2\}) \cdot \dots \cdot P_n(\{e_n\}).$$

За вказаних умов ймовірнісний простір (Ω, S, P) називають *добутком ймовірнісних просторів* (Ω_i, S_i, P_i) , $i = 1, 2, \dots, n$.

Наприклад, нехай для експериментів $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ з підкиданням одно- і двохкопійчаної монет

відповідні ймовірнісні простри мають вигляд (Ω_1, S_1, P_1) і (Ω_2, S_2, P_2) , де $\Omega_1 = \{\Gamma_1, \Upsilon_1\}$, $\Omega_2 = \{\Gamma_2, \Upsilon_2\}$, $S_1 = S_1^* = \{\emptyset, \{\Gamma_1\}, \{\Upsilon_1\}, \{\Gamma_1, \Upsilon_1\} = \Omega_1\}$, $S_2 = S_2^* = \{\emptyset, \{\Gamma_2\}, \{\Upsilon_2\}, \{\Gamma_2, \Upsilon_2\} = \Omega_2\}$, $P_1(\{\Gamma_1\}) = p_1$, $P_1(\{\Upsilon_1\}) = 1 - p_1$, $P_2(\{\Gamma_2\}) = p_2$ і $P_2(\{\Upsilon_2\}) = 1 - p_2$. Тоді (Ω, S, P) – добуток цих ймовірнісних просторів, якщо

$$\Omega = \{(\Gamma_1, \Gamma_2), (\Gamma_1, \Upsilon_2), (\Upsilon_1, \Gamma_2), (\Upsilon_1, \Upsilon_2)\},$$

$$S = S^* \text{ – найширший з усіх можливих простір подій } A \subset \Omega,$$

а ймовірність P визначається рівностями

$$P(\{\Gamma_1, \Gamma_2\}) = P_1(\{\Gamma_1\}) \cdot P_2(\{\Gamma_2\}) = p_1 \cdot p_2,$$

$$P(\{\Gamma_1, \Upsilon_2\}) = P_1(\{\Gamma_1\}) \cdot P_2(\{\Upsilon_2\}) = p_1(1 - p_2),$$

$$P(\{\Upsilon_1, \Gamma_2\}) = P_1(\{\Upsilon_1\}) \cdot P_2(\{\Gamma_2\}) = p_2(1 - p_1),$$

$$P(\{\Upsilon_1, \Upsilon_2\}) = P_1(\{\Upsilon_1\}) \cdot P_2(\{\Upsilon_2\}) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2).$$

2.2. Розміщення, перестановки і комбінації та їх кількість. Майже завжди (а особливо у школі) вивчення нового математичного поняття доцільно розпочинати з конкретної задачі, розв'язування якої вимагає введення цього поняття. Наприклад, вивчення елементів комбінаторики можна розпочати з розв'язування такої задачі. *Припустимо, що учневі треба зателефонувати другові, але він забув r останніх цифр (нехай, $r=3$) потрібного номера, проте пам'ятає, що забуті цифри непарні і попарно різні. Знайти ймовірність того, що учень правильно набере потрібний номер телефону за умови, що всі варіанти наборів по 3 цифри рівноможливі.*

За умовою задачі $r=3$ останніх цифр телефонного номера утворюють впорядкований набір (x_1, x_2, x_3) попарно різних елементів $x_i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $i=1, 2, 3$. У зв'язку з цим природно ввести наступне означення: *розміщенням з n даних попарно різних елементів a_1, a_2, \dots, a_n по r елементів називають упорядкований набір (x_1, x_2, \dots, x_r) попарно різних елементів $x_i \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $i=1, 2, \dots, r$.*

За умовою даної задачі останні три цифри номера телефону утворюють розміщення з $n=5$ елементів 1, 3, 5, 7, 9 по $r=3$ елементи. Прикладами таких розміщень є: (1, 3, 5), (3, 1, 5), (3, 5, 1), (5, 3, 1), (5, 1, 3), (1, 5, 3), (1, 3, 7) і т.д. Кількість усіх таких розміщень позначають A_5^3 (в загальному випадку A_n^r). Тому, вважаючи, що ці розміщення утворюють простір Ω рівноможливих елементарних подій, серед яких лише одне розміщення забезпечує правильний набір номера телефону, приходимо до висновку, що у рамках побудованої ймовірнісної моделі шукана ймовірність $p = \frac{1}{A_5^3}$.

У зв'язку з цим природно виникає питання: «А як знайти A_5^3 і взагалі A_n^r ?».

Знайти відповідь на це питання можна різними способами.

Перший спосіб можна пов'язати з подіями B_i – « i -та з трьох забутих цифр набрана правильно». Тоді за домовленістю:

- $P(B_1) = \frac{1}{5}$, оскільки e_1 – перша із забутих цифр є однією з множини $\{1, 3, 5, 7, 9\}$;

- $P(B_2 | B_1) = \frac{1}{4}$, оскільки e_2 – друга із забутих цифр є однією з множини $\{1, 3, 5, 7, 9\} \setminus \{e_1\}$;

- $P(B_3 | B_1 B_2) = \frac{1}{3}$, оскільки e_3 – третя із забутих цифр є однією з множини $\{1, 3, 5, 7, 9\} \setminus \{e_1, e_2\}$.

Оскільки подія $B = B_1 B_2 B_3$ означає, що всі три забуті цифри набрані правильно, то за формулою ймовірності добутку подій маємо:

$$P(B) = P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1) \cdot P(B_3 | B_1 B_2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{60}.$$

Враховуючи, що $P(B) = p = \frac{1}{A_5^3}$, дістаємо, що $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, після чого неважко

переконалися, що $A_n^r = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)$, $0 \leq r \leq n$.

Другий спосіб знаходження шуканої ймовірності і формули для обчислення A_n^r можна пов'язати з добутком випадкових експериментів та ймовірнісних просторів.

Щоб знайти кількість усіляких розміщень з n даних елементів по r елементів, подивимося на довільне фіксоване розміщення (e_1, e_2, \dots, e_r) як на результат експерименту ε , що є добутком експериментів $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$, де:

- експеримент ε_1 полягає у виборі навмання елемента x_1 з множини $\Omega_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, причому $P(x_1 = e_1) = P_1(\{e\}) = \frac{1}{n}$ для будь-якого $e \in \Omega_1$;
- експеримент ε_2 полягає у виборі навмання елемента x_2 з множини $\Omega_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \setminus \{e_1\}$, причому $P(x_2 = e_2 | x_1 = e_1) = P_2(\{e\}) = \frac{1}{n-1}$ для будь-якого $e \in \Omega_2$, і т.д.;
- останній експеримент ε_r полягає у виборі навмання елемента x_r з множини $\Omega_r = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_{r-1}\}$, причому $P(x_r = e_r | x_1 = e_1, \dots, x_{r-1} = e_{r-1}) = P_r(\{e\}) = \frac{1}{n-r+1}$ для будь-якого $e \in \Omega_r$.

Таким чином, усілякі розміщення (x_1, x_2, \dots, x_r) утворюють множину Ω , а для довільного фіксованого елемента $(e_1, e_2, \dots, e_r) \in \Omega$ експеримент ε по суті полягає у виборі навмання розміщення (x_1, x_2, \dots, x_r) з множини Ω і перевірки рівностей $x_i = e_i$, $i = 1, 2, \dots, r$. При цьому

$$\begin{aligned} P(\{(e_1, e_2, \dots, e_r)\}) &= P(x_1 = e_1, x_2 = e_2, \dots, x_r = e_r) = \\ &= P(x_1 = e_1)P(x_2 = e_2 | x_1 = e_1) \dots P(x_r = e_r | x_1 = e_1, \dots, x_{r-1} = e_{r-1}) = \\ &= P_1(\{e_1\}) \cdot P_2(\{e_2\}) \cdot \dots \cdot P_r(\{e_r\}) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n-r+1}. \end{aligned}$$

Остання рівність означає, що усі елементарні події (розміщення з n елементів по r елементів) простору Ω є рівноможливими. Тому, якщо кількість таких розміщень (елементарних подій) позначити A_n^r , то дістанемо, що

$$P(\{(x_1, x_2, \dots, x_r)\}) = \frac{1}{A_n^r} = \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)},$$

звідки

$$A_n^r = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (2)$$

де r та n цілі числа і $0 \leq r \leq n$. При цьому за означенням $0! = 1$ і $A_n^0 = 1$.

Після вивчення розміщень з n елементів по r елементів природно розглянути перестановки даних n елементів, як частинний випадок розміщень (це розміщення з n елементів по n елементів) і дістати як наслідок з формули (2) формулу для обчислення кількості P_n усіляких перестановок даних n елементів:

$$P_n = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Так само, за допомогою конкретної практичної задачі можна ввести поняття комбінації з n елементів по r елементів, розкрити зв'язок комбінацій з відповідними розміщеннями та знайти і довести формулу для обчислення кількості C_n^r усіляких комбінацій з n елементів по r елементів:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad 0 \leq r \leq n. \quad (4)$$

Зрозуміло, що це також можна пов'язати з певним стохастичним експериментом та побудовою відповідної ймовірнісної моделі.

Для визначення кількості \bar{A}_n^r усіляких розміщень з повтореннями з n даних елементів по r елементів скористаємося тим, що довільне звичайне розміщення (x_1, x_2, \dots, x_r) можна вважати

результатом експерименту ε , що є добутком експериментів ε_i , $i=1,2,\dots,r$, кожен з яких полягає у виборі навмання без повернення елемента x_i з множини $\Omega_i = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\}$, $i=1,2,\dots,r$, $\Omega_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Тому за аналогією можна вважати довільне розміщення (x_1, x_2, \dots, x_r) з повторенням результатом експерименту ε , що є добутком експериментів ε_i , $i=1,2,\dots,r$, кожен з яких полягає у виборі навмання з поверненням елемента x_i з однієї і тієї самої множини $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

З такими експериментами ε_i природно пов'язати ймовірнісні простори (Ω_i, S_i, P_i) , де $\Omega_i = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $S_i = S_i^*$, $P_i(\{e_i\}) = \frac{1}{n}$, $i=1,2,\dots,r$, $e_i \in \{e_1, e_2, \dots, a_n\}$.

Добуток цих ймовірнісних просторів дає ймовірнісний простір (Ω, S, P) , де $\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_r) : x_i \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, i=1,2,\dots,r\}$, (тобто елементами Ω є усілякі розміщення з повтореннями з n елементів a_1, a_2, \dots, a_n по r елементів), $S_i = S_i^*$ і $P(\{e\}) = P(\{(x_1, x_2, \dots, x_r)\}) = P_1(\{x_1\}) \cdot P_2(\{x_2\}) \cdot \dots \cdot P_r(\{x_r\}) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^r}$.

Отже, елементарні події простору Ω є рівноможливими, а тому, якщо \bar{A}_n^r – кількість таких елементарних подій (розміщень з повтореннями з n даних елементів по r елементів), то

$$P(\{e\}) = \frac{1}{\bar{A}_n^r} = \frac{1}{n^r}, \text{ звідки}$$

$$\bar{A}_n^r = n^r, \quad (5)$$

де r і n фіксовані цілі невід'ємні числа.

Серед усіх розміщень з повтореннями виділяють такі, що відрізняються від певного фіксованого розміщення (x_1, x_2, \dots, x_r) з повтореннями з n даних попарно різних елементів a_1, a_2, \dots, a_n по r елементів лише порядком елементів. Кожне таке розміщення називають *перестановкою з повтореннями, породженою даним розміщенням з повтореннями*. Для таких перестановок кожен елемент a_i зустрічається r_i разів, причому $r_i \geq 0$ і $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$.

Позначимо $P_r(r_1, r_2, \dots, r_n)$ – кількість попарно різних перестановок з повтореннями, породжених розміщенням (x_1, x_2, \dots, x_r) .

У цих перестановках елемент a_1 можна розмістити $C_r^{r_1}$ способами, для кожного з яких елемент a_2 можна розмістити $C_{r-r_1}^{r_2}$ способами, і взагалі кожен елемент a_k можна розмістити $C_{r-(r_1+\dots+r_{k-1})}^{r_k}$ способами $k=1,2,\dots,r$, $r_0=0$. Тому

$$\begin{aligned} P_r(r_1, r_2, \dots, r_n) &= C_r^{r_1} \cdot C_{r-r_1}^{r_2} \cdot C_{r-(r_1+r_2)}^{r_3} \cdot \dots \cdot C_{r-(r_1+\dots+r_{n-1})}^{r_n} = \\ &= \frac{r!}{r_1!(r-r_1)!} \cdot \frac{(r-r_1)!}{r_2!(r-r_1-r_2)!} \cdot \frac{(r-r_1-r_2)!}{r_3!(r-r_1-r_2-r_3)!} \cdot \dots \cdot \frac{(r-r_1-\dots-r_{n-1})!}{r_n!(r-r_1-r_2-\dots-r_n)!} = \\ &= \frac{r!}{r_1!r_2!\dots r_n!}. \end{aligned}$$

Отже,

$$P_r(r_1, r_2, \dots, r_n) = \frac{r!}{r_1!r_2!\dots r_n!}, \quad (5)$$

де цілі числа $r_i \geq 0$ і $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$.

Числа $P_r(r_1, r_2, \dots, r_n)$, визначені за рівністю (5), називають *поліноміальними коефіцієнтами*, оскільки вони є коефіцієнтами полінома (многочлена):

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)^r = \sum_{r_1+r_2+\dots+r_n=r} P_r(r_1, r_2, \dots, r_n) \cdot \alpha_1^{r_1} \cdot \alpha_2^{r_2} \cdot \dots \cdot \alpha_n^{r_n}.$$

Звідси випливає, що сума поліноміальних коефіцієнтів $P_r(r_1, r_2, \dots, r_n)$ при фіксованому r дорівнює n^r .

Зокрема у випадку $n=2$ поліноміальні коефіцієнти $P_r(r_1, r_2, \dots, r_n) = \frac{r!}{r_1! r_2!} = \frac{r!}{r_1!(r-r_2)!}$

перетворюється у біноміальні коефіцієнти $C_r^{r_1} = C_r^{r_2}$, а $\sum_{r_1=0}^r C_r^{r_1} = 2^r$

Якщо у перестановках з повтореннями, породжених розміщенням (x_1, x_2, \dots, x_r) , нехтувати порядком елементів, то замість всіх таких перестановок дістанемо невпорядкований набір елементів (x_1, x_2, \dots, x_r) , у якому кожен елемент $x_i \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $i=1, 2, \dots, r$, причому кожен елемент a_i зустрічається $r_i \geq 0$ разів серед елементів x_1, x_2, \dots, x_r і $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$. Тоді кожен такий невпорядкований набір (x_1, x_2, \dots, x_r) називають комбінацією з повтореннями з n даних попарно різних елементів a_1, a_2, \dots, a_n по r елементів.

Отже, кожна комбінація з повтореннями $(x_1, x_2, \dots, x_r) = x$ цілком визначається набором чисел $r_1(x), r_2(x), \dots, r_n(x)$. Тому, дві комбінації з повтореннями: $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ та $y = (y_1, y_2, \dots, y_r) \in$ рівними тоді і тільки тоді, коли $r_1(x) = r_1(y)$, $r_2(x) = r_2(y)$, \dots , $r_n(x) = r_n(y)$.

Враховуючи цей факт кожен комбінацію з повторенням з n даних елементів a_1, a_2, \dots, a_n по r елементів можна тлумачити як результат випадкового експерименту, коли:

1) r елементів комбінації зображуються r зірочками: (*), які розташовано в n скриньках, зображених за допомогою $(n+1)$ вертикальних рисок. Наприклад, чотири вертикальні риси $|||$ зображують три скриньки. Скриньки, зображені $(n+1)$ вертикальними рисками, занумеровано номерами від 1 до n зліва направо. При цьому у першій скриньці знаходиться r_1 елементів a_1 , у другій – r_2 елементів a_2 , \dots , у n -ій – r_n елементів a_n ;

2) якщо $r_i \geq 0$ – кількість елементів комбінації, що співпадають з a_i , тобто знаходяться у i -ій скриньці, то ці елементи зображуються r_i зірочками (*), що лежать між відповідною парою вертикальних рисок. Наприклад, зображення виду $|**| \quad |**|$ означає, що відповідне сполучення з повторенням з трьох елементів a_1, a_2, a_3 по чотири елементи має вигляд (a_1, a_1, a_3, a_3) , тобто по два елементи містяться у першій і третій скриньці, а у другій скриньці елементів нема.

Бачимо, що кожна комбінація з повтореннями з n елементів по r елементів взаємно однозначно визначається відповідним зображенням $(n+1)$ -ї риси і r – зірочок. При цьому перший і останній знак зображення обов'язково є вертикальними рисками, а інші $(n+r-1)$ знаків на r місцях є зірочками, а на інших місцях – рисками.

Таким чином, утворення кожної комбінації з повтореннями полягає у виборі r місць серед $(n+r-1)$ -го місця. Тому кількість \bar{C}_n^r усіляких комбінацій з повтореннями з n елементів по r елементів обчислюється за формулою

$$\bar{C}_n^r = C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}. \quad (6)$$

Наведені комбінаторні формули відіграють важливу роль у статистичній фізиці. Розкриття цієї ролі є важливішим за розв'язування величезної кількості стандартних задач на обчислення ймовірностей за допомогою комбінаторних формул.

3. Ймовірнісні моделі розташування мікрочастинок в комірках фазового простору. У статистичній фізиці досліджують властивості макроскопічних тіл на основі властивостей і законів руху їх мікрочастинок (молекули, атоми, елементарні частинки (протони, електрони, нейтрони тощо)). У величезній кількості фізичних моделей реального світу виходять з того, що кожна мікрочастинка у будь-який момент часу знаходиться у певній комірці так званого *фазового простору*. Відомо, що розташування мікрочастинок в комірках фазового простору не є детермінованим, а має випадковий характер, який розкривається за допомогою певних ймовірнісних моделей [1, с. 60-62].

3.1. Статистика Максвелла-Больцмана. Розглянемо r мікрочастинок, що знаходяться у фазовому просторі, який складається з n комірок. На початку створення статистичної фізики вчені вважали, що і мікрочастинки, і комірки фазового простору є *розрізнюваними об'єктами*, тобто кожній мікрочастинці можна приписати певний номер від 1 до r , а кожній комірці – номер від 1 до n . Окрім цього вважали, що у кожній комірці фазового простору може міститися будь-яка

кількість від 0 до r мікрочастинок з номером від 1 до r . Отже якщо r_k – кількість мікрочастинок у k -ій комірці, то $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$.

При цьому, кожний i -й мікрочастиці відповідає єдиний номер n_i комірки, проте різні мікрочастинки (за номерами) можуть міститися в одній комірці, тобто різним номерам мікрочастинок може відповідати один і той самий номер комірки. Тому маємо розміщення з повторенням n комірок на r мікрочастинках. Кожне таке розміщення називатимемо розташуванням r мікрочастинок в n комірках фазового простору.

Оскільки у фіксований момент часу кожна мікрочастинка може знаходитися у будь-якій з n комірок, то для цього моменту часу можливим є n^r розташувань r мікрочастинок в n комірках.

Виходячи з інтуїтивного розуміння випадковості, вчені на початку вважали, що усі ці n^r розташувань є рівномірними, а тому відповідна ймовірнісна модель (Ω, S, P) визначається умовами:

- простір елементарних подій Ω є сукупністю усіляких розміщень з повтореннями з n комірок по r мікрочастинках; кількість таких розміщень дорівнює n^r ;

- кожне розміщення $e \in \Omega$ визначає подію $E=\{e\}$, ймовірність якої $P(E)=\frac{1}{n^r}$, тобто

простір подій S є найширшим з можливих, а ймовірність P рівномірно розподілена на множині елементарних подій Ω .

У таблиці 1 наведено ілюстрації елементарних подій простору Ω для випадків $r=3, n=2$ та $r=2, n=3$, коли мікрочастинки позначено a_i , а кожна комірка зображена парою сусідніх вертикальних рисок.

Окрім цього вказано відповідне розміщення з повтореннями з n номерів 1, 2, ..., n комірок по r номерам мікрочастинок. Наприклад, розміщення (1, 1, 1) означає, що у першій комірці містяться мікрочастинки a_1, a_2 і a_3 ; (1, 1, 2) – у першій комірці містяться a_1, a_2 , а у другій a_3 ; (1, 2, 1) – у першій комірці містяться a_1 і a_3 , а у другій – a_2 і т.д.

Таблиця 1

e_i	$r=3, n=2$	$r=2, n=3$
e_1	$ a_1 a_2 a_3 \quad $ (1, 1, 1)	$ a_1 a_2 \quad \quad $ (1,1)
e_2	$ \quad a_1 a_2 a_3 $ (2,2,2)	$ \quad a_1 a_2 \quad $ (2,2)
e_3	$ a_1 a_2 \quad a_3 \quad $ (1,1,2)	$ \quad \quad a_1 a_2 $ (3,3)
e_4	$ a_1 a_3 \quad a_2 \quad $ (1,2,1)	$ \quad a_1 \quad \quad a_2 \quad $ (1,2)
e_5	$ a_2 a_3 \quad a_1 \quad $ (2,1,1)	$ \quad a_2 \quad \quad a_1 \quad $ (2,1)
e_6	$ \quad a_1 \quad \quad a_2 a_3 \quad $ (1,2,2)	$ \quad a_1 \quad \quad \quad a_2 \quad $ (1,3)
e_7	$ \quad a_2 \quad \quad a_1 a_3 \quad $ (2,1,2)	$ \quad a_2 \quad \quad \quad a_1 \quad $ (3,1)
e_8	$ \quad a_3 \quad \quad a_1 a_2 \quad $ (2,2,1)	$ \quad \quad a_1 \quad \quad a_2 \quad $ (2,3)
e_9		$ \quad \quad a_2 \quad \quad a_1 \quad $ (3,2)

У випадку $r=3, n=2$ маємо $P(\{e_i\}) = \frac{1}{8}, i=1,2,\dots,8$, а у випадку $r=2, n=3$ маємо

$$P(\{e_i\}) = \frac{1}{9}, i=1,2,\dots,9.$$

Наведену ймовірнісну модель називають *статистикою Максвелла-Больцмана*, а відповідний розподіл ймовірностей – *розподілом Максвелла-Больцмана*. Згідно з цією статистикою ймовірність події $A = A(r_1, r_2, \dots, r_n)$ – «у i -й комірці міститься $r_i \in \overline{0, r}$ елементів» – складається з усіляких перестановок фіксованого розміщення з повторенням (x_1, x_2, \dots, x_r) , визначається рівністю

$$P(A) = \frac{r!}{r_1!r_2!\dots r_n!n^r}, \quad (8)$$

оскільки кількість таких перестановок дорівнює $\frac{r!}{r_1!r_2!\dots r_n!}$, де $r_i \geq 0$ – кількість мікрочастинок у i -й комірці, $i=1, 2, \dots, n$, причому $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$ – загальна кількість мікрочастинок.

Зокрема, якщо $r=3, n=2$, то подія $A = A(2,1) = \{e_3, e_4, e_5\}$ – «у першій комірці міститься $r_1 = 2$ елемента, а у другій $r_2 = 1$ елемент» і тому $P(A) = P(\{e_3, e_4, e_5\}) = \frac{3}{8} = \frac{3!}{2!!2^3} = P(\{e_6, e_7, e_8\})$, а якщо $r=2, n=3$, то подія $A = A(1,1,0) = \{e_4, e_5\}$ – «у першій комірці міститься $r_1 = 1$ елемент, у другій – $r_2 = 1$ елемент і у третій – $r_3 = 0$ елементів» і тому $P(A) = P(\{e_4, e_5\}) = \frac{2}{9} = \frac{2!}{1!!0!3^2} = P(\{e_6, e_7\}) = P(\{e_8, e_9\})$ (див. таблицю 1).

3.2. Статистика Бозе-Ейнштейна. Априорі (тобто до проведення дослідів) статистика Максвелла-Больцмана не викликала у вчених ніяких заперечень, проте на практиці виявилось, що для багатьох видів мікрочастинок ймовірностями подій $A = A(r_1, r_2, \dots, r_n)$ доцільно вважати зовсім інші числа:

$$P(A) = P(A(r_1, r_2, \dots, r_n)) = \frac{1}{C_{n+r-1}^r} \quad (9)$$

При цьому також виявилось, що не для кожної елементарної події $e \in \Omega$ можна знайти статистичну ймовірність події $E = \{e\}$, тобто *не доцільно вважати простір подій S найширшим з можливих*. Замість цього слід вважати, що простір подій S породжений попарно несумісними подіями $A(r_1, r_2, \dots, r_n)$.

Причина цього виявилася у тому, що на практиці можна фіксувати лише кількість мікрочастинок у кожній комірці фазового простору. Тому усі елементарні події, що утворюють подію $A = A(r_1, r_2, \dots, r_n)$, тобто є перестановками з повторенням фіксованого розміщення з повторенням, на практиці сприймаються як одна комбінація з повтореннями з n елементів по r елементів. Оскільки кількість таких комбінацій з повтореннями дорівнює C_{n+r-1}^r , то можна вважати, що ймовірнісна модель визначається рівністю (9). Таку ймовірнісну модель називають *статистикою Бозе-Ейнштейна*, а рівномірний розподіл ймовірності на множині подій $A(r_1, r_2, \dots, r_n)$, що визначається рівністю (9), називають *розподілом Бозе-Ейнштейна*.

У статистиці Бозе-Ейнштейна можна вважати, що елементарними подіями є усілякі розміщення з повтореннями з n елементів по r елементів (і тоді простір подій S породжується подіями $A(r_1, r_2, \dots, r_n)$), або ж вважати, що елементарними подіями є усілякі комбінації з повтореннями з n елементів по r елементів, і тоді простір подій S є найширшим з можливих.

Наприклад, для другого підходу і випадків $r=3, n=2$ та $r=2, n=3$ ілюстрації елементарних подій наведено у таблиці 2, де (1, 1, 1) означає, що у першій комірці містяться усі мікрочастинок і це позначається парою (3, 0), де $r_1 = 3, r_2 = 0$; (1, 1, 2) означає, що у першій комірці – дві мікрочастинок, а у другій – одна і це позначається парою (2, 1), тобто $r_1 = 2, r_2 = 1$; для $r=2, n=3$ пара(1, 1) означає, що у першій комірці містяться обидві мікрочастинок, а у другій та третій комірках нема мікрочастинок і це позначається трійкою (2, 0, 0), тобто $r_1 = 2, r_2 = 0, r_3 = 0$ і т.д.

Таблиця 2

e_i	$r=3, n=2$	$r=2, n=3$
-------	------------	------------

e_1	***	**
	(1,1,1) (3,0)	(1,1) (2,0,0)
e_2	***	**
	(2,2,2) (0,3)	(2,2) (0,2,0)
e_3	** *	**
	(1,1,2) (2,1)	(3,3) (0,0,2)
e_4	* **	* *
	(1,2,2) (1,2)	(1,2) (1,1,0)
e_5	* *	* *
		(1,3) (1,0,1)
e_6	* *	* *
		(2,3) (0,1,1)

У таблиці 2 кожна мікрочастинка позначена одним і тим самим символом “*”, оскільки мікрочастинки вважаються *нерозрізнюваними*.

3.3. Статистика Фермі-Дірака. Статистика Бозе-Ейнштейна ефективно застосовна до багатьох мікрочастинок, які називають *бозонами*. Наприклад, бозонами є фотони, π -мезони, α -частинки, атомні ядра з парною кількістю нуклонів.

Разом з тим виявилось, що для багатьох мікрочастинок статистика Бозе-Ейнштейна не є ефективною, тобто не всі мікрочастинки є бозонами. Наприклад, протони, електрони, нейтрони не є бозонами. Для таких видів мікрочастинок була запропонована інша ймовірнісна модель (Ω, S, P) , яку називають *статистикою Фермі-Дірака*, а такі мікрочастинки називають *ферміонами*.

Сутність цієї моделі полягає у тому, що можливими є лише такі розташування r нерозрізнюваних мікрочастинок в n комірках фазового простору, коли у кожній комірці міститься не більше однієї мікрочастинки. Тому обов’язково $r \leq n$ і кожне таке розташування мікрочастинок в комірках є комбінацією з n елементів по r елементів. Отже, елементарними подіями простору Ω можна вважати усілякі комбінації з n елементів по r елементів. Оскільки кількість таких комбінацій дорівнює C_n^r , то було запропоновано вважати, що

$$P(\{e\}) = \frac{1}{C_n^r}, \quad e \in \Omega. \quad (10)$$

Розподіл ймовірностей за формулою (10) називають *розподілом Фермі-Дірака*.

Наприклад, дві нерозрізнювані мікрочастинки ($r=2$) можна розташувати в трьох комірках так:

$$| * | * | \quad , \quad | * | \quad | * | \quad , \quad | \quad | * | * | \quad ,$$

тобто $\Omega = \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ і тому

$$P(e) = \frac{1}{3} = \frac{1}{C_3^2} = \frac{2!!}{3!}.$$

Отже, до проведення змістовних досліджень вчені-фізики не мали підстав вважати, що розташування мікрочастинок в комірках фазового простору не задовольняє розподіл Максвелла-Больцмана, а різні види мікрочастинок (наприклад, фотони і протони) підпорядковуються різним ймовірнісним законам. Таким чином, *інтуїтивні уявлення про випадковість та ймовірність, пов’язані з рівноможливістю усіх можливих результатів випадкового експеримента, на практиці часто виявляються хибними*.

4. Ймовірнісна модель успадкування ознак при випадковому схрещуванні. Теорема Харді. У сучасній біології *випадковим схрещуванням* [1, с. 152-154] називають експеримент, пов’язаний з випадковим вибором батьківської пари з множини усіляких можливих батьківських пар, результатом чого є наслідування ознак (від батька та від матері) *нащадками першого покоління* (та наступних поколінь). Точніше, батьківський і материнський гени (що відповідають за певні ознаки) вибирають випадково і незалежно з множини генів-гамет чоловічих і жіночих осіб *батьківської популяції*. Ці гамети утворюються шляхом розщеплення статевих клітин, що мають один з генотипів AA, Aa чи aa .

Фактично експеримент ε з випадкового схрещування можна тлумачити як добуток експериментів: $\varepsilon = (\varepsilon_1 \times \varepsilon_2) \times (\varepsilon_3 \times \varepsilon_4)$, де:

- експеримент ε_1 (експеримент ε_3) полягає у випадковому виборі з множини $\Omega_1 = \{AA, Aa, aa\}$ генотипів можливого батька (матері). При цьому імовірнісний простір (Ω_1, S_1, P_1) визначається рівностями $P_1(AA) = P_1(\{AA\}) = u$, $P_1(Aa) = P_1(\{Aa\}) = 2v$ і $P_1(aa) = P_1(\{aa\}) = w$, де $u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$ і $u + 2v + w = 1$;
- експеримент ε_2 (експеримент ε_4) полягає у виборі навання першої або другої гамет, що є результатом розщеплення клітин певного генотипу. При цьому імовірнісний простір (Ω_2, S_2, P_2) визначається умовами $\Omega_2 = \{1; 2\}$, $P_2(1) = P_2(\{1\}) = P_2(2) = P_2(\{2\}) = \frac{1}{2}$, тобто кожна з двох утворених гамет певного генотипу може бути вибраною з ймовірністю $\frac{1}{2}$;
- результати експерименту $\varepsilon_\delta = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$ утворюють простір $\Omega_\delta = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(AA,1), (AA,2), (Aa,1), (Aa,2), (aa,1), (aa,2)\} = \{A_1, A_2, A, a, a_1, a_2\}$, де $A_1 = (AA,1)$ – результати вибору першої гамет, пов'язаної з генотипом AA і аналогічне тлумачення для позначень A_2, a_1 і a_2 ; $A = (Aa,1)$ – результат вибору першої гамет, пов'язаної з генотипом Aa , і аналогічне тлумачення для позначення $a = (Aa,2)$.

З експериментом ε_δ пов'язаний імовірнісний простір $(\Omega_\delta, S_\delta, P_\delta)$, що є добутком імовірнісних простірив (Ω_1, S_1, P_1) і (Ω_2, S_2, P_2) . Тому

$$P_\delta(A_1) = P_\delta((AA,1)) = P_1(AA) \cdot P_2(1) = u \cdot \frac{1}{2} = \frac{u}{2};$$

$$P_\delta(A_2) = P_\delta((AA,2)) = P_1(AA) \cdot P_2(2) = u \cdot \frac{1}{2} = \frac{u}{2};$$

$$P_\delta(A) = P_\delta((Aa,1)) = P_1(Aa) \cdot P_2(1) = 2v \cdot \frac{1}{2} = v;$$

$$P_\delta(a) = P_\delta((Aa,2)) = P_1(Aa) \cdot P_2(2) = 2v \cdot \frac{1}{2} = v;$$

$$P_\delta(a_1) = P_\delta((aa,1)) = P_1(aa) \cdot P_2(1) = w \cdot \frac{1}{2} = \frac{w}{2};$$

$$P_\delta(a_2) = P_\delta((aa,2)) = P_1(aa) \cdot P_2(2) = w \cdot \frac{1}{2} = \frac{w}{2}.$$

Розглянемо події:

$A_\delta = \{A_1, A_2, A\}$ – «нащадок успадкував від батька ген-гамет A »;

$a_\delta = \{a_1, a_2, a\}$ – «нащадок успадкував від батька ген-гамет a ».

Легко бачити, що

$$p = P_\delta(A_\delta) = P_\delta(A_1) + P_\delta(A_2) + P_\delta(A) = \frac{u}{2} + \frac{u}{2} + v = u + v \geq 0,$$

а

$$q = P_\delta(a_\delta) = P_\delta(a_1) + P_\delta(a_2) + P_\delta(a) = \frac{w}{2} + \frac{w}{2} + v = w + v \geq 0,$$

причому $p + q = u + 2v + w = 1$.

У зв'язку з цим можна вважати, що з експериментом ε_δ пов'язаний імовірнісний простір $(\Omega_\delta^*, S_\delta^*, P_\delta^*)$, де $\Omega_\delta^* = \{A_\delta, a_\delta\}$ і $P_\delta^*(A_\delta) = p = u + v$, а $P_\delta^*(a_\delta) = q = w + v$.

Аналогічно можна дістати експеримент $\varepsilon_m = (\varepsilon_3 \times \varepsilon_4)$, пов'язаний з випадковим наслідуванням нащадком від матері генів-гаметів A чи a , і переконатися, що випадково вибраний нащадок першого покоління успадковує від матері ген-гамет A з ймовірністю $P_m(A_m) = p = u + v$, або ген-гамет a – з ймовірністю $P_m(a_m) = q = w + v$.

Оскільки експеримент \mathcal{E} з випадкового схрещування є добутком експериментів \mathcal{E}_δ і \mathcal{E}_m , то відповідний йому імовірнісний простір (Ω, S, P) є добутком імовірнісних просторів $(\Omega_\delta^*, S_\delta^*, P_\delta)$ та (Ω_m^*, S_m^*, P_m) .

Тому

$$\Omega = \Omega_\delta^* \times \Omega_m^* = \{A_\delta, a_\delta\} \times \{A_m, a_m\} = \{(A_\delta, A_m), (A_\delta, a_m), (A_m, a_\delta), (a_\delta, a_m)\},$$

$$P(A_\delta, A_m) = P_\delta(A_\delta) \cdot P_m(A_m) = p \cdot p = p^2,$$

$$P(A_\delta, a_m) = P_\delta(A_\delta) \cdot P_m(a_m) = pq,$$

$$P(A_m, a_\delta) = P_m(A_m) \cdot P_\delta(a_\delta) = pq,$$

$$P(a_\delta, a_m) = P_\delta(a_\delta) P_m(a_m) = q^2.$$

Звідси випливає, що *при випадковому схрещуванні ймовірність наслідування нащадком першого покоління генотипу AA, Aa чи aa дорівнює відповідно*

- $P(AA) = P((A_\delta, A_m)) = p^2$;
- $P(Aa) = P(\{(A_\delta, a_m), (A_m, a_\delta)\}) = P((A_\delta, a_m)) + P((A_m, a_\delta)) = pq + pq = 2pq$;
- $P(aa) = P((a_\delta, a_m)) = q^2$,

де $p = u + v$, $q = w + v$, причому для популяції батьків генотип AA, Aa і aa розподілено у відношенні $u : 2v : w$, де $u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$ і $u + 2v + w = 1 = p + q$.

Таким чином для популяції нащадків першого покоління генотип AA, Aa і aa розподілено у відношенні $u_1 : 2v_1 : w_1$, де $u_1 = p^2, v_1 = pq, w_1 = q^2$, а тому $p_1 = u_1 + v_1 = p^2 + pq = p(p + q) = p$, $q_1 = w_1 + v_1 = q^2 + pq = q(q + p) = q$.

За доведеним для популяції нащадків другого покоління генотипи AA, Aa і aa розподілено у відношенні $p^2 : 2pq : q^2$. Такий самий розподіл дістаємо для популяції нащадків третього, четвертого і взагалі i -го покоління $i \geq 1$.

Отже, правильна наступна **теорема Харді**: *за умов випадкового схрещування для популяції нащадків i -го покоління, $i=1,2,3,\dots$, розподіл генотипів AA, Aa і aa є стаціонарним, тобто ймовірність цих генотипів розподілено у відношенні $p^2 : 2pq : q^2$, де $p = u + v, q = w + v$, а числа $u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$ довільні і задають розподіл генотипів AA, Aa і aa у нульовій батьківській популяції у відношенні $u : 2v : w$.*

Англійський математик Г. Харді, який довів це твердження, підкреслював, що на практиці розподіл генотипів AA, Aa і aa для нащадків i -го покоління, $i=1,2,3,\dots$, насправді є *приблизно стаціонарним*, оскільки при переході від покоління до покоління генетична структура хоч і повільно, проте змінюється. Це ще одне підтвердження того, що *будь-яка математична модель, зокрема ймовірнісна, надає лише наближені відомості про досліджувані об'єкти. Якщо точність наближення задовольняє дослідника, модель вважають ефективною та продовжують застосовувати її. В іншому разі модель вважають неефективною та її уточнюють або будують принципово нову модель.*

5. Ймовірнісна модель пришвидшення аналізу крові у великій групі людей.

Припустимо, що в якійсь надзвичайній ситуації (епідемія, стихійне лихо, бойові дії) необхідно зробити аналіз крові у великій групі людей, яка нараховує $t = kn$ осіб.

Якщо досліджувати кров кожної людини окремо, то слід провести t аналізів, а t – дуже велике і тому на це потрібно багато часу, якого може не бути.

Чи можна пришвидшити потрібний аналіз? Виявляється, що так [1, с. 254]. Для цього можна розподілити наявні t осіб на n груп по k осіб у кожній. Кров k осіб кожної групи змішують і аналізується суміш.

Якщо результат цього аналізу негативний, тобто серед k осіб нема хворих, то для k осіб достатньо проведення одного аналізу.

Якщо ж результат аналізу суміші позитивний, тобто серед k осіб принаймні один хворий, то потрібно додатково провести аналіз крові кожної з k осіб даної групи і тому у цьому випадку необхідно провести $(k + 1)$ аналіз.

Припустимо, що для кожної з t осіб ймовірність позитивного аналізу дорівнює $p \in (0;1)$. Тоді, якщо кожна група з k осіб утворюється навмання, то, згадуючи біноміальні ймовірності,

дістанемо: ймовірність того, що у цій групі буде принаймні один хворий, дорівнює $1 - (1 - p)^k = p_1$.

Отже, для кожної групи можна побудувати ймовірнісну модель (Ω, S, P) , для якої $\Omega = \{1; 0\}$, де 1 означає, що у групі є принаймні один хворий, а 0 – означає, що хворих у групі нема; $S = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{0\}\}$; $P(\{1\}) = p_1 = 1 - (1 - p)^k$ і $P(\{0\}) = (1 - p)^k = 1 - p_1$.

Введемо випадкову величину $X(e)$, $e \in \Omega$; $X(1) = k + 1$, $X(0) = 1$ – кількість відповідних аналізів крові для даної групи осіб. Математичне сподівання цієї випадкової величини дорівнює $M[X] = (k + 1)p_1 + 1 \cdot (1 - p_1) = k + 1 - k(1 - p)^k$.

Оскільки треба дослідити n груп по k осіб у кожній групі, то, здійснюючи повторні незалежні випробування, дістанемо незалежні випадкові величини $X_i(e)$, $e \in \Omega^n = \{e = (e_1, \dots, e_n) : e_i \in \{1; 0\}, i \in \overline{1, n}\}$, де $X_i(e) = X_i(e_1, \dots, e_n) = X(e_i)$. Тому

$$X_i(e) = X_i(e_1, \dots, e_n) = \begin{cases} k + 1, & \text{коли } e_i = 1, \\ 1, & \text{коли } e_i = 0. \end{cases}$$

Оскільки для кожного i -го випробування ймовірність $P_n(\{e = (e_1, \dots, e_n) : e_i = 1\}) = p_1 = 1 - (1 - p)^k$, то $M[X_i] = M[X] = k + 1 - k(1 - p)^k$, $i \in \overline{1, n}$.

Зрозуміло, що випадкова величина $X(e) = \sum_{i=1}^n X_i(e)$, $e \in \Omega^n$, набуває значень $n + ik$, $i \in \overline{0, n}$, де i – кількість тих координат елементарної події $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, що дорівнюють 1. Ці значення характеризують можливі кількості аналізів крові. Згідно із законом великих чисел спостережені значення випадкової величини X з великою ймовірністю мало відрізняються від математичного сподівання $M[X]$, де

$$M[X] = M\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n M[X_i] = n(k + 1 - k(1 - p)^k) = nk\left(1 - (1 - p)^k + \frac{1}{k}\right) = m\left(1 - (1 - p)^k + \frac{1}{k}\right).$$

Виявляється, що коли k близьке до $\frac{1}{\sqrt{p}}$, то $M[X] = m\left(1 - (1 - p)^k + \frac{1}{k}\right)$ близьке до $2m\sqrt{p}$,

а тому для малих p кількість аналізів крові за розглянутою методикою може бути суттєво менша за m . Так, наприклад, під час другої світової війни використання цієї методики дозволяло скоротити кількість аналізів на 80%.

6. Ймовірнісна модель оцінки якості великої кількості виробів та прогнозування результатів виборів. Нехай деяке підприємство виготовило велику кількість n виробів, серед яких є певна невідома кількість m бракованих. Припустимо, що перевірка якості кожного з n виробів є економічно недоцільною. Тоді здійснюють так званий *вибірковий контроль*: навмання вибирають n_0 виробів (n_0 значно менше за n) і серед них знаходять усі браковані – нехай їх кількість буде m_0 .

Наскільки добре число $\frac{m_0}{n_0} = p^*$ – статистична ймовірність наближає фактичне

відношення $p = \frac{m}{n}$? Щоб відповісти на поставлене питання, побудуємо ймовірнісну модель

(Ω, S, P) , де $\Omega = \{1; 0\}$, $S = S^* = \{\emptyset, (\Omega, \{1\}, \{0\})\}$, а $P(\{1\}) = \frac{m}{n} = p$, $P(\{0\}) = 1 - p$, тобто експеримент полягає у виборі навмання виробу і фіксації бракований він чи ні. Результатом кожного випробування є 1, коли виріб виявився бракованим, і 0 в іншому разі.

Добре організований *вибірковий контроль* повинен забезпечувати умову, що у кожному з n послідовних випробувань (вибиранні навмання виробу) ймовірність даної події A (вибраний виріб є бракованим) залишається приблизно однією і тією самою. Тоді, як відомо, ймовірність

того, що $|p^* - p| = |p^*(A) - p(A)| < \varepsilon = \beta \sqrt{\frac{p(p-1)}{n_0}}$, досить мало відрізняється від числа $2\Phi(\beta)$, де

$\Phi(\beta)$ – функція Лапласа. Зокрема, якщо $\beta = 3$, то ця ймовірність мало відрізняється від 0,9974. Таким чином з ймовірністю $2\Phi(\beta)$ можна вважати, що

$$|p - p^*| = \left| \frac{m}{n} - \frac{m_0}{n_0} \right| < \beta \sqrt{\frac{p(1-p)}{n_0}} \Leftrightarrow (p - p^*)^2 n_0 < \beta^2 p(1-p) \Leftrightarrow (p^2 - 2pp^* + p^{*2})n_0 - \beta^2 p + \beta^2 p^2 < 0 \Leftrightarrow (\beta^2 + n_0)p^2 - (2n_0p^* + p^2)p + n_0p^{*2} < 0.$$

Розв'язавши останню нерівність, дістанемо, що з ймовірністю $2\Phi(\beta)$ $p \in (a_1(n_0, \beta); a_2(n_0, \beta))$, де

$$\begin{aligned} a_{1,2}(n_0, \beta) &= \frac{(2n_0p^* + \beta^2) \pm \sqrt{(2n_0p^* + \beta^2)^2 - 4(\beta^2 + n_0)n_0p^{*2}}}{2(\beta^2 + n_0)} = \\ &= \frac{(2n_0p^* + \beta^2) \pm \sqrt{4n_0^2 p^{*2} + 4n_0p^* \beta^2 + \beta^4 - 4\beta^2 n_0 p^{*2} - 4n_0^2 p^{*2}}}{2(p^2 + n_0)} = \\ &= \frac{2n_0p^* + \beta^2 \pm \sqrt{4n_0\beta^2 p^*(1-p^*) + \beta^4}}{2(\beta^2 + n_0)}. \end{aligned}$$

Наприклад, якщо підприємство виготовило кілька мільйонів виробів, серед яких перевірено $n_0 = 10000$ і при вибірковому контролі виявлено $m_0 = 300$ бракованих виробів, то з ймовірністю $0,9974 = 2\Phi(3)$ можна вважати, що $\beta \in (a_1(10000, 3); a_2(10000, 3))$, де

$$\begin{aligned} a_{1,2}(10000, 3) &= \frac{600 + 9 \pm \sqrt{36 \cdot 300(1 - \frac{3}{100}) + 81}}{2(9 + 10000)} = \frac{609 \pm \sqrt{36 \cdot 291 + 81}}{20018} \approx \\ &\approx 0,0304 \pm \frac{6 \cdot 17}{20018} \approx 0,0304 \pm 0,005. \end{aligned}$$

Тобто з ймовірністю 0,9974 можна стверджувати, що $p \approx 0,030$ і абсолютна похибка цього наближення не перевищує 0,005.

Інтервал $(a; b)$, в якому знаходиться невідома ймовірність p , називають *довірчим інтервалом*, а ймовірність того, що p належить довірчому інтервалу називають *рівнем довіри*.

Для розглянутого прикладу довірчим інтервалом є $(0,0254; 0,0354)$, а рівень довіри дорівнює 0,9974.

7. Математичне сподівання, теорема про середнє і обчислення об'ємів деяких фігур.

Розкриваючи міжпредметні зв'язки теорії ймовірностей, доцільно звернути увагу на теорему про середнє для інтегралів довільної кратності:

$$\int_{\Omega_x} \psi(x) \varphi(x) dx = M[Z] \cdot \int_{\Omega_x} \varphi(x) dx \quad (1)$$

за умови інтегровності функцій ψ та φ на Ω_x , причому $\varphi(x) \geq 0$ на Ω . При цьому функцію φ називають *ваговою функцією*, а число

$$M[Z] = \frac{1}{\int_{\Omega_x} \varphi(x) dx} \cdot \int_{\Omega_x} \psi(x) \varphi(x) dx, \text{ де } Z = \psi(x), \quad (2)$$

за умови $\int_{\Omega} \varphi(x) dx > 0$, називають *інтегральним зваженим середнім функції ψ на множині Ω_x* .

Зокрема, якщо $\varphi(x) = 1$, коли $x \in G \subset \Omega_x$ і $\varphi(x) = 0$, коли $x \notin G \subset \Omega_x$, причому $\int_{\Omega_x} \varphi(x) dx =$

$= \int_G 1 dx = m(G) \in (0; +\infty)$, то рівність (1) набуде вигляду

$$\int_G \psi(x) dx = M[Z] \cdot m(G),$$

а тому рівність (2) перетвориться у рівність

$$M[Z] = \frac{1}{m(G)} \int_G \psi(x) dx \quad (2^*)$$

Тоді число $M[Z]$ називають *середнім інтегральним значенням функції ψ на множині G* . У випадку, коли G – компактна множина, а ψ неперервна на G , то $M[Z] = \psi(x^*)$ для деякої точки

$x^* \in G$.

Зауважимо, що величину $M[Z]$ в рівності (2*) можна тлумачити як математичне сподівання випадкової величини $Z = \psi(X)$ за умови, що ймовірність P_X розподілено на множині Ω_X значень випадкової величини X з щільністю $f_X(x) = \frac{\varphi(x)}{\int_{\Omega_X} \varphi(x) dx}$, $x \in \Omega_X$.

Зокрема, рівність (2) можна тлумачити як математичне сподівання випадкової величини $Z = \psi(X)$ за умови, що ймовірність P_X розподілено рівномірно на множині $G \subset \Omega_X$. Враховуючи це, маємо для подвійних інтегралів формулу

$$\iint_G \psi(x, y) dx dy = M[Z] \cdot m(G), \quad (3)$$

яка у випадку неперервної і невід'ємної функції $\psi(x, y)$, $(x, y) \in G$, пов'язує об'єм V циліндричного тіла під поверхнею, що задається функцією $\psi(x, y)$, $(x, y) \in G$, з площею $m(G)$ основи цього тіла та з математичним сподіванням $M[Z]$ випадкової величини $Z = \Psi(X, Y)$, коли ймовірність P_{XY} рівномірно розподілена на множині $G \subset \Omega_{XY}$ значень двохвимірної випадкової величини (X, Y) .

Зауважимо, що якщо на множині $\Omega \subset R^n$ задано ймовірнісну міру (розподіл ймовірностей) P_X , а також задано функцію $Z = \psi(X)$, $X \in R^n$, $Z \in R^1$, то математичне сподівання випадкової величини обчислюється за формулою

$$M[Z] = \int_{\Omega_z} z P_z(dz) = \int_{\Omega} \psi(x) P_X(\psi^{-1}(dz)) \quad (**),$$

де Ω_z образ множини Ω при відображенні $Z = \psi(X)$, P_z – ймовірнісна міра на множині Ω_z , що породжується випадковою величиною Z на основі міри P_X .

Якщо при цьому розподіл ймовірностей на множині Ω абсолютно неперервний і рівномірний, $\Omega = G$, то із формули (**) одержується формула (2*).

На основі формули (3) можна створити низку задач, за допомогою яких можна прослідкувати зв'язки теорії ймовірностей з іншими розділами математики.

Наведемо деякі приклади таких задач.

7.1. Об'єм конуса, площа його основи і математичне сподівання.

Нехай потрібно обчислити об'єм конуса з висотою h і основою G , міра (площа) якої $m(G)$ відома, а бічна поверхня конуса описується рівнянням $z = \psi(x, y)$, $(x, y) \in G$, $z \in [0; h]$. Нехай G_z – частина площини всередині конуса, яка паралельна до основи конуса і перетинає конус на висоті z , $0 \leq z \leq h$. Із подібності трикутників OSM і O_zSM_z (Рис. 1) слідує

$$m(G_z) = \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 m(G) = \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 m(G), \quad z \in [0; h].$$

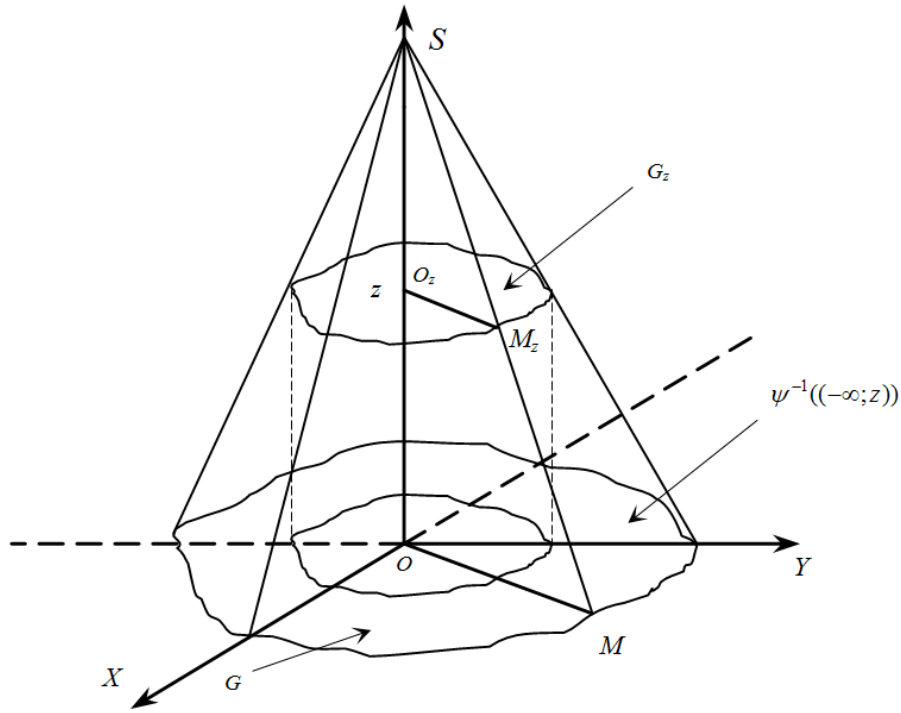


Рис. 1

Будемо вважати, що на множині G задано рівномірний розподіл ймовірностей із щільністю

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m(G)}, & \text{коли } (x,y) \in G, \\ 0, & \text{коли } (x,y) \notin G \end{cases}$$

і розглянемо випадкову величину $Z = \psi(X,Y)$, де (X,Y) випадковий вектор із множиною значень G .

Тоді функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Z

$$F_Z(z) = P_Z((-\infty; z)) = P_{(X,Y)}(\psi^{-1}((-\infty; z)))$$

в розглядуваному випадку матиме вигляд

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{коли } z \leq 0, \\ \frac{1}{m(G)}(m(G) - m(G_z)) = 1 - \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2, & \text{коли } z \in [0; h]; \\ 1, & \text{коли } z \geq h, \end{cases}$$

звідки

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{коли } z \notin [0; h], \\ \frac{2}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right), & \text{коли } z \in [0; h]. \end{cases}$$

Обчислюючи тепер $M[Z]$, одержимо

$$M[Z] = \int_0^h z f_Z(z) dz = \int_0^h z \cdot \frac{2}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right) dz = \frac{2}{h} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3h} \right) \Big|_0^h = \frac{h}{3}.$$

Враховуючи, що

$$M[Z] = \int_{\Omega_Z} z P_Z(dz) = \int_{\Omega_Z} z f_Z dz = \iint_{\Omega} \psi(x,y) P_{(X,Y)}(\psi^{-1}(dz)) = \iint_{\Omega} \psi(x,y) f_{(X,Y)}(x,y) dx dy,$$

де $\Omega_Z = Z(\Omega)$ – образ множини Ω при відображенні $Z = \psi(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$, а також, що в розглядуваному випадку $\Omega = G$, $\Omega_Z = \{z \mid z \in [0; h]\}$,

$$f_{(x,y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m(G)}, & \text{коли } (x,y) \in G, \\ 0, & \text{коли } (x,y) \notin G, \end{cases}$$

одержимо

$$M[Z] = \int_0^h z f_Z(z) dz = \iint_G \psi(x,y) \frac{1}{m(G)} dx dy,$$

звідки

$$\iint_G \psi(x,y) dx dy = m(G) \cdot M[Z] = m(G) \cdot \frac{h}{3}.$$

Зокрема, якщо в основі конуса круг радіуса R , тобто $G = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$, тоді об'єм такого конуса дорівнюватиме

$$V = \iint_G \psi(x,y) dx dy = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

Якщо G – круг радіуса R з центром в початку координат, $G = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$, а конус прямий (вершина конуса проектується в центр круга), тоді функція $\psi(x,y)$ матиме вигляд

$$\psi(x,y) = h \left(1 - \frac{1}{R} \sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad (x,y) \in G$$

і за попереднім

$$\iint_G h \left(1 - \frac{1}{R} \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx dy = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

Аналогічні задачі можна сформулювати для випадків, коли:

- $\psi(x,y) = h$, $x^2 + y^2 \leq R^2$, і дістати формулу об'єму циліндра: $V = \pi R^2 h$ та $M[Z] = h$;
- $\psi(x,y) = h$, коли $x^2 + y^2 \leq r^2$, і $z = \psi(x,y)$ – бічна поверхня зрізаного конуса з висотою h , нижньою основою – $G = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ і верхньою основою – $G_h = \{(x,y,h) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$, де $r < R$, та дістати формулу об'єму зрізаного конуса $V = \frac{\pi}{3} h(R^2 + rR + r^2)$, а також $M[Z] = \frac{h}{3} \left(1 + \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2}\right)$;
- $\psi(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq R^2$, і дістати формули об'єму півкулі: $V = \frac{2}{3} \pi R^3$, а отже і кулі: $2V = \frac{4}{3} \pi R^3$, та $M[Z] = \frac{2}{3} R$.

8. Висновки. 1. Не зважаючи на те, що ймовірнісні моделі з рівноможливими елементарними подіями відіграють на практиці важливу роль, *орієнтуватися лише на такі моделі у процесі навчання стохастики студентів та учнів неприпустимо для будь-яких типів навчальних закладів*, оскільки це формує хибні уявлення про випадковість та її кількісне оцінювання.

2. *Не можна підпорядковувати навчання стохастики вивченню елементів комбінаторики*, оскільки у стохастичній комбінаторній методи пов'язані переважно з рівноможливими елементарними подіями. Корисніше вводити найпростіші комбінаторні поняття і знаходити («відкривати») відповідні формули за допомогою певних стохастичних експериментів і побудови відповідних ймовірнісних моделей.

3. *Вивчення стохастики на будь-якому рівні слід розпочинати з побудови статистичних моделей*, у яких ймовірність визначається за допомогою відносних частот (статистичних ймовірностей [3]-[6]), оскільки саме за допомогою статистичних ймовірностей можна перевірити ефективність будь-якої ймовірнісної моделі.

4. *Доцільно систематично підкреслювати, що використання будь-якої ймовірнісної моделі дозволяє лише наближено прогнозувати, наскільки часто може відбуватися досліджувана реальна випадкова подія*. Будь-яка математична модель є лише наближеним описом оточуючого світу, проте саме для ймовірнісних моделей властивим є те, що нехтування цією наближеністю призводить до грубих помилок, парадоксів і нівелювання випадковості до рівня детермінованості.

Література

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. – М.: Мир, 1984. – 528 с.
2. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Яценко И.В. Преподавание теории вероятностей и статистики в школе // Математика в школе. – №7, 2009. – С. 14-31.
3. Жалдак М.І., Михалін Г.О. Елементи стохастики. Посібник для вчителів. – К.: Шкільний світ, 2006. – 120 с.
4. Жалдак М.І., Михалін Г.О. Елементи стохастики. Збірник задач і вправ. Посібник для вчителів у 2-х частинах. – К.: Шкільний світ, 2008. – частина 1 – 124 с., частина 2 – 64 с.
5. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Михалін Г.О. Теорія ймовірностей і математична статистика. Підручник для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. – Полтава: «Довкілля-К», 2009. – 500 с.
6. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Михалін Г.О. Збірник задач і вправ з теорії ймовірностей і математичної статистики. – Полтава: «Довкілля-К», 2010. – 724 с.