Біляй І.М.
НПУ імені М.П. Драгоманова

Математичне сподівання, теорема про середнє та обчислення площ та об'ємів деяких фігур

Сучасна математика характеризується систематичним вивченням можливих типів кількісних співвідношень і просторових форм. Одним з напрямів розвитку сучасної шкільної математики є стохастика – наука про випадкові явища.

Розвиток стохастики як науки і розширення сфер її застосувань чинить вплив на формування ймовірнісно-статистичної лінії при навчанні багатьох предметів, зокрема математики, в загальноосвітній школі вже протягом понад століття. При вивченні стохастики, як і при вивченні будь-якої змістової лінії алгебри і початків аналізу, найбільші труднощі викликає застосування теоретичних положень розв'язування практичних і прикладних задач. Також існують невирішені проблеми низької мотивації та складності матеріалу, що перешкоджає розумінню навчального матеріалу і розвиває в учнів невпевненість у своїх силах. Для глибокого і правильного розуміння теоретичних положень стохастики необхідне чітке розуміння учнями змісту початкових фундаментальних понять, постійне підкріплення з'ясування теоретичних основ стохастики розв'язуванням практично орієнтованих задач.

До системи задач, призначених для вивчення стохастики в школі, поряд з традиційними необхідно включати задачі, які хоч і відсутні у діючих шкільних підручниках, але мають важливе значення в процесі вивчення даної змістової лінії. Враховуючи це, тематику основних типів задач можна розширити, додавши задачі на обчислення площ та об'ємів геометричних фігур, використовуючи зв'язок між 1-м та 2-м способами обчислення математичного сподівання функції випадкового аргумента (теорему про середнє). Наведемо деякі приклади таких задач та їх розв'язання.

Розглянемо випадкову величину X з рівномірним розподілом ймовірностей на множині Ω_X її значень, причому множина Ω_X – неперервна, обмежена і має обмежену міру $0 < m(\Omega_X) < \infty$. Тоді щільність розподілу ймовірностей на Ω_X має вигляд

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{m(\Omega_X)}, & \text{коли } x \in \Omega_X, \\ 0, & \text{коли } x \overline{\in} \Omega_X. \end{cases}$$

Нехай на множині Ω_X задано функцію $Z = \psi(X)$ від випадкового аргумента X. Знайшовши розподіл ймовірностей на множині Ω_Z значень випадкової величини Z, обчислимо математичне сподівання $M[Z]$ випадкової величини Z: $M[Z] = \int\limits_{\Omega_Z} z P_Z(dz)$. З іншого боку $M[Z] = \int\limits_{\Omega_X} \psi(x) f_X(x) dx$.

Оскільки $f_X(x)$ стала на Ω_X і набуває значень $\dfrac{1}{m(\Omega_X)}$, коли $x \in \Omega_X$, то

$$M[Z] = \frac{1}{m(\Omega_X)} \int\limits_{\Omega_X} \psi(x) dx,$$

звідки

$$\int\limits_{\Omega_X} \psi(x) dx = m(\Omega_X) \cdot M[Z] \qquad (1)$$

Таким чином має місце *теорема про середнє значення* функції $\psi(X)$:

Інтеграл $\int\limits_{\Omega_X} \psi(x) dx$ *від функції* $\psi(X)$ *на множині* Ω_X *дорівнює мірі* $m(\Omega_X)$ *множини* Ω_X, *помноженій на середнє значення* $M[Z]$ *функції* $\psi(X)$, *зважене за мірою* P_Z, *що породжується випадковою величиною* $Z = \psi(X)$ *на множині* Ω_Z *значень випадкової величини Z.*

1. Площа трикутника. *Графік функції* $y = \psi(x)$ *подано на Рис. 1. Використовуючи зв'язок між 1-м та 2-м способами обчислення математичного сподівання функції випадкового аргумента (теорему про середнє), вивести формулу для обчислення площі трикутника.*

Правильні наступні рівності: $\dfrac{\overline{A}\overline{O}}{AO} = \dfrac{h-y}{h}$, $\dfrac{\overline{B}\overline{O}}{BO} = \dfrac{h-y}{h}$.

Тоді $QB = OB - \overline{O}\overline{B} = OB\left(1 - \left(1 - \frac{y}{h}\right)\right) = OB \cdot \frac{y}{h}$. $AP = AO - \overline{A}\overline{O} = AO\left(1 - \left(1 - \frac{y}{h}\right)\right) = AO \cdot \frac{y}{h}$.

Функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Y матиме вигляд:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, \ \ y \le 0, \\ \frac{y}{h}(AO + OB) \cdot \frac{1}{AO + OB} = \frac{y}{h}, \ \ 0 \le y \le h, \\ 1, \ \ h \le y. \end{cases}$$

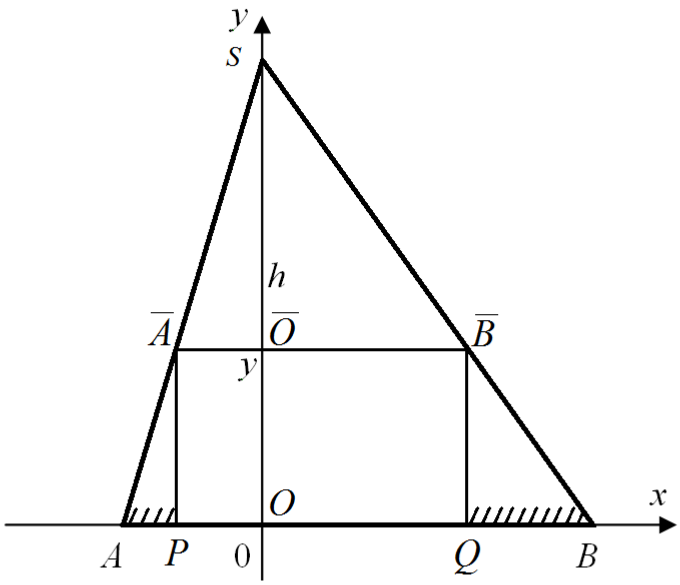

Рис. 1

Відповідно до функції $F_Y(y)$ розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Y знайдемо щільність $f_Y(y)$ розподілу ймовірностей на цій множині:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} 0, \ \ y \overline{\in} [0, h], \\ \frac{1}{h}, \ \ y \in [0, h]. \end{cases}$$

Обчислимо тепер математичне сподівання випадкової величини Y

$$M[Y] = \int_0^h y f_Y(y) dy = \frac{1}{h} \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^h = \frac{h}{2}.$$

Враховуючи формулу

$$M[Z] = \int_{\Omega_X} z P_z(dz) = \int_{\Omega_X} \psi(x) P_X(\psi^{-1}(dz)),$$

яка в розглядуваному прикладі зводиться до вигляду:

$$M[Y] = \int_{\Omega_Y} y P_Y(dy) = \int_{\Omega_X} \psi(x) P_X(\psi^{-1}(dy)) = \int_{\Omega_X} \psi(x) f_X(x) dx$$

одержимо

$$M[Y] = \int_{AB} \psi(x) f_X(x) dx = \frac{1}{m(AB)} \int_{AB} \psi(x) dx,$$

звідки

$$\int_{AB} \psi(x) dx = M[Y] \cdot m(AB),$$

тобто

$$\int_{AB} \psi(x) dx = \frac{h}{2} \cdot m((AO + OB)) = \frac{h}{2} \cdot m(AB).$$

Таким чином, площа трикутника ASB дорівнює половині добутку довжини його основи на висоту.

Якщо трикутник такий, що його вершина проектується за межі його основи (Рис. 2), тоді досить продовжити основу трикутника так, щоб вершина трикутника проектувалася на продовжену основу, і розглянути новий трикутник $AB'C$ з так продовженою основою (Рис. 2), отриманий з трикутника ABC продовженням його основи. Тоді одержимо

$$S_{AB'C} = \frac{1}{2}|AB'|\cdot h = \frac{1}{2}(AB + BB')h = S_{ABC} + S_{BB'C} = \frac{1}{2}AB\cdot h + \frac{1}{2}BB'\cdot h,$$

де перший доданок – шукана площа, другий доданок – площа трикутника, доповнюючого трикутник ABC з основою AB до трикутника $AB'C$ з основою AB'.

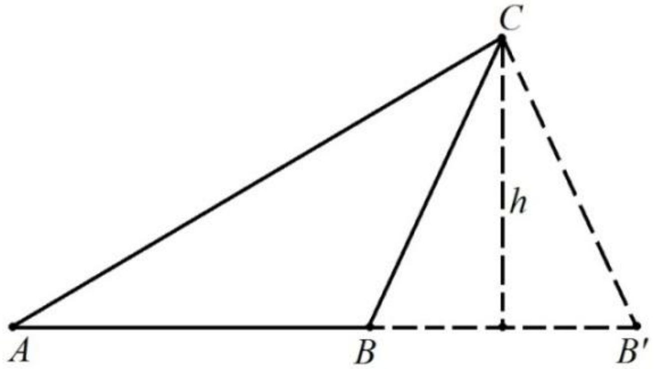

Рис. 2

Таким чином формула для обчислення площі трикутника ABC залишається правильною, хоч безпосередньо до трикутника ABC застосувати наведені раніше міркування неможливо, оскільки залежність між змінними x і y, за допомогою якої описується множина точок на сторонах трикутника, в розглядуваному випадку, виявляється неоднозначною.

2. Площа трапеції. *Графік функції* $y = \psi(x)$ *подано на Рис. 3. Використовуючи зв'язок між 1-м та 2-м способами обчислення математичного сподівання функції випадкового аргумента (теорему про середнє), вивести формулу для обчислення площі трапеції.*

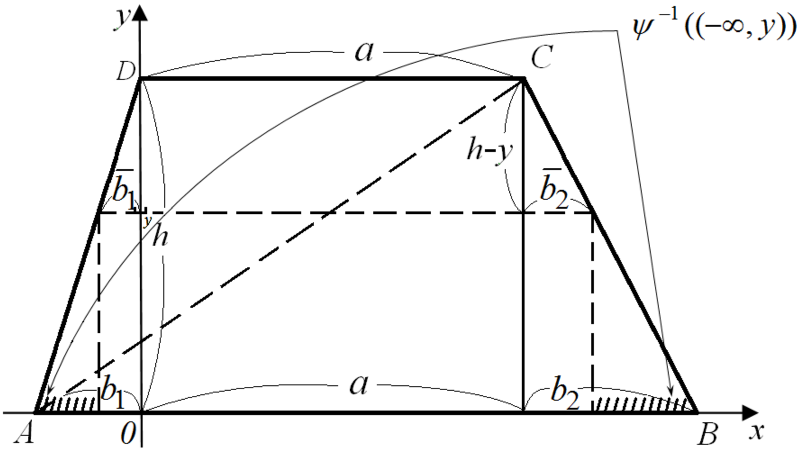

Рис. 3

З Рис. 3 видно, що $\frac{h-y}{h} = \frac{\bar{b}_2}{b_2} = \frac{\bar{b}_1}{b_1}$, звідки

$$\bar{b}_1 = b_1\left(1 - \frac{y}{h}\right),\ \bar{b}_2 = b_2\left(1 - \frac{y}{h}\right),\ b_2 - b_2\left(1 - \frac{y}{h}\right) = b_2\frac{y}{h},\ b_1 - b_1\left(1 - \frac{y}{h}\right) = b_1\frac{y}{h}.$$

Функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Y має вигляд:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0,\ \ y \le 0, \\ \frac{y}{h}\cdot\frac{b_1 + b_2}{b_1 + b_2 + a},\ \ 0 \le y \le h, \\ 1,\ \ h \le y. \end{cases}$$

Розподіл мішаний: частина ймовірності $\frac{a}{b_1 + b_2 + a}$ зосереджена в точці $y = h$, інша частина $\frac{b_1 + b_2}{b_1 + b_2 + a}$ розподілена рівномірно із щільністю

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, \text{ коли } \; y\,\overline{\in}\,[0,h],\\ \dfrac{1}{h}\cdot\dfrac{b_1+b_2}{b_1+b_2+a}, \text{ коли } \; y\in[0,h].\end{cases}$$

Тому

$$M[Y]=\int_0^h y\tilde{f}_Y(y)dy+h\cdot\frac{a}{b_1+b_2+a}=\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^h\cdot\frac{1}{h}\cdot\frac{b_1+b_2}{b_1+b_2+a}+$$

$$+h\cdot\frac{a}{b_1+b_2+a}=\frac{h}{2}\cdot\frac{b_1+b_2}{b_1+b_2+a}+\frac{h}{2}\cdot\frac{2a}{b_1+b_2+a}=\frac{h}{2}\cdot\frac{(b_1+b_2+a)+a}{b_1+b_2+a}.$$

Оскільки

$$M[Y]=\int_{AB}\psi(x)f_X(x)dx=\int_{AB}\psi(x)\frac{1}{b_1+b_2+a}dx=\int_{AB}\psi(x)\frac{1}{m(AB)}dx,$$

то

$$\int_{AB}\psi(x)dx=M[Y]\cdot m(AB)=\frac{h}{2}\cdot\frac{(b_1+b_2+a)+a}{b_1+b_2+a}\cdot(b_1+b_2+a)=\frac{h}{2}\cdot((b_1+b_2+a)+a).$$

Таким чином, площа трапеції дорівнює половині добутку суми довжин основ трапеції на висоту.

3. Площа круга. *Задано функцію* $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in[-r,r]$ *(рівняння верхнього півкола, Рис. 4). Використовуючи зв'язок між 1-м та 2-м способами обчислення математичного сподівання функції випадкового аргумента (теорему про середнє), вивести формулу для обчислення площі круга радіуса r.*

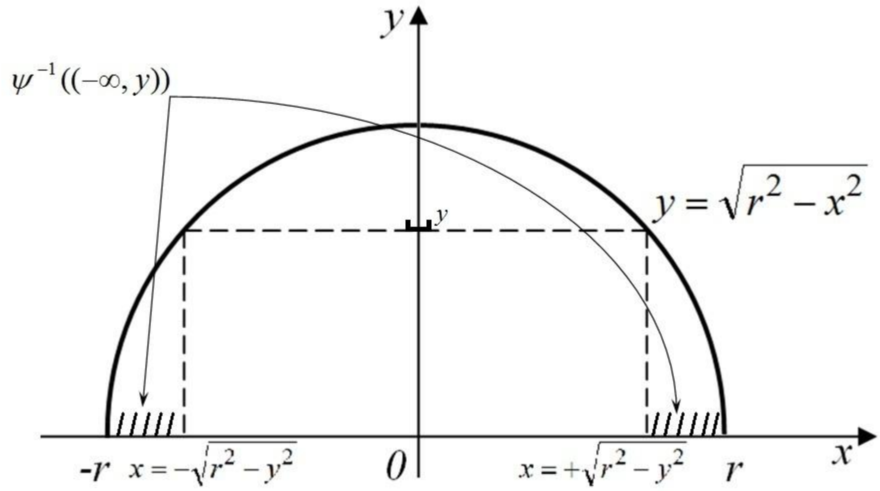

Рис. 4

Міркуючи аналогічно до попереднього, одержуємо

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, \; y\le 0,\\ \dfrac{2}{2r}(r-\sqrt{r^2-y^2}), \; 0\le y\le r,\\ 1, \; r\le y.\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}0, \; y\,\overline{\in}\,[0,r],\\ \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{y}{\sqrt{r^2-y^2}}, \; y\in[0,r].\end{cases}$$

$$M[Y]=\frac{1}{2}\int_{-r}^{r}y\cdot\frac{y}{\sqrt{r^2-y^2}}dy=\int_0^r\frac{y^2}{\sqrt{r^2-y^2}}dy\left|\begin{matrix}y=u, & \dfrac{ydy}{\sqrt{r^2-y^2}}=dv\\ dy=du, & v=-\sqrt{r^2-y^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=-y\sqrt{r^2-y^2}\Big|_0^r++\int_0^r\sqrt{r^2-y^2}dy=\int_0^r\frac{r^2-y^2}{\sqrt{r^2-y^2}}dy,$$

звідки

$$2\int_0^r\frac{y^2}{\sqrt{r^2-y^2}}dy=r\frac{y}{r}\arcsin\frac{y}{r}\Big|_0^r=\frac{1}{r}r^2\arcsin 1=\frac{\pi}{2}r^2\frac{1}{r}=\frac{\pi r}{2}.$$

Тобто

$$M[Y]=\int_0^r \frac{y^2}{\sqrt{r^2-y^2}}\,dy=\frac{\pi r}{4},$$

а тому

$$\int_{-r}^{r}\psi(x)dx=M[Y]m((-r,r))=\frac{\pi r}{4}\cdot 2r=\frac{\pi r^2}{2}.$$

Отже, площа круга радіуса r дорівнює πr^2.

№ 4. Площа еліпса. *Задано функцію* $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $x\in[-a,a]$ *(рівняння верхньої половини еліпса, Рис. 5). Використовуючи зв'язок між 1-м та 2-м способами обчислення математичного сподівання функції випадкового аргумента (теорему про середнє), вивести формулу для обчислення площі еліпса з півосями a і b.*

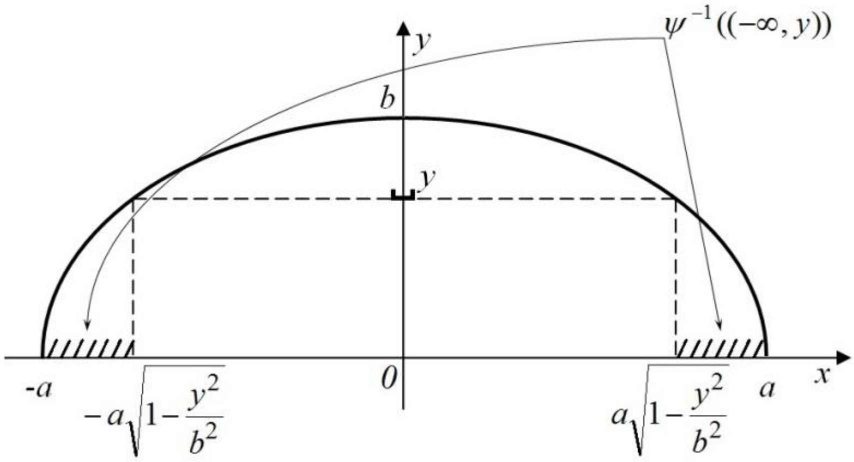

Рис. 5

Вважаючи, що

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2a}, & x\in[-a,a],\\ 0, & x\notin[-a,a].\end{cases}$$

Одержимо:

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ 1-\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}, & y\in[0,b],\\ 1, & b\le y.\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\notin[0,b],\\ \dfrac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}, & y\in[0,b].\end{cases}$$

Тому

$$M[Y]=\int_0^b y\cdot\frac{\frac{y^2}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}\,dy=\int_0^b\frac{\left(\frac{y}{b}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}\,dy=\left|\begin{matrix}y=u, & \dfrac{\frac{y}{b^2}dy}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}=dv\\ dy=du, & v=-\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\end{matrix}\right|=-y\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\Bigg|_0^b+$$

$$+\int_0^b\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\,dy=\int_0^b\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}\,dy-\int_0^b\frac{\left(\frac{y}{b}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}\,dy.$$

Звідки $2\int\limits_0^b \frac{\left(\frac{y}{b}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}\,dy = b\int\limits_0^b \frac{d\left(\frac{y}{b}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} = b\arcsin\left(\frac{y}{b}\right)\Bigg|_0^b = b\,\frac{\pi}{2}.$

Отже,

$$M[Y] = \int\limits_0^r \frac{\left(\frac{y}{b}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}\,dy = b\,\frac{\pi}{4}.$$

$$\int\limits_{-a}^{a} \psi(x)dx = \int\limits_{-a}^{a} b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx = M[Y]\cdot m((-a,a)) = b\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 2a = \frac{\pi ab}{2}.$$

Таким чином, площа еліпса з півосями a та b обчислюється за формулою $S_{еліпса} = \pi ab$.

Якщо a=b, тоді еліпс стає колом радіуса a, яке обмежує площу круга величиною $S_{круга} = \pi a^2$.

5. Об'єм конуса. *Нехай задано функцію $z = \psi(x,y)$ на множині G, $(x,y)\in G$, причому у графічному поданні поверхнею, точки (x,y,z) якої задовільняють рівність $z=\psi(x,y)$, є поверхня конуса з основою G і висотою h (Рис. 6). Використовуючи зв'язок між 1-м та 2-м способами обчислення математичного сподівання функції випадкових аргументів (теорему про середнє), вивести формулу для обчислення об'єму конуса.*

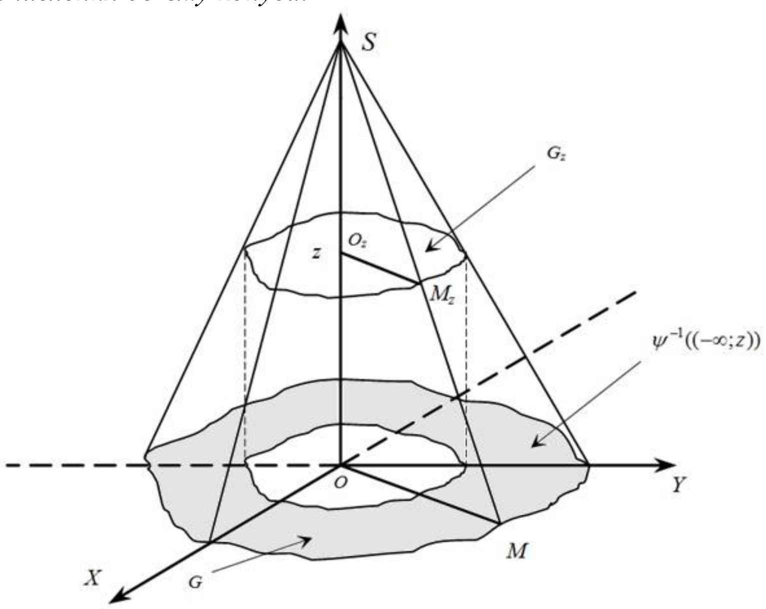

Рис. 6

Нехай потрібно обчислити об'єм конуса з висотою h і основою G, міра (площа) якої $m(G)$ відома, а бічна поверхня конуса описується рівнянням $z=\psi(x,y)$, $(x,y)\in G$, $z\in[0;h]$. Нехай G_z – частина площини всередині конуса, яка паралельна до основи конуса і перетинає конус на висоті z, $0\le z\le h$. Із подібності трикутників OSM і O_zSM_z (Рис. 6) слідує

$$m(G_z) = \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 m(G) = \left(1-\frac{z}{h}\right)^2 m(G),\ z\in[0;h].$$

Будемо вважати, що на множині G задано рівномірний розподіл ймовірностей із щільністю

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{m(G)}, & \text{коли } (x,y)\in G, \\ 0, & \text{коли } (x,y)\ \overline{\in}\ G \end{cases}$$

і розглянемо випадкову величину $Z=\psi(X,Y)$, де (X,Y) випадковий вектор із множиною значень G.

Тоді функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Z

$$F_Z(z) = P_Z((-\infty;z)) = P_{(X,Y)}(\psi^{-1}((-\infty;z)))$$

в розглядуваному випадку матиме вигляд

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & \text{коли } z\le 0,\\ \dfrac{1}{m(G)}(m(G)-m(G_Z))=1-\left(1-\dfrac{z}{h}\right)^2, & \text{коли } z\in[0;h],\\ 1, & \text{коли } z\ge h,\end{cases}$$

звідки

$$f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\begin{cases}0, & \text{коли } z\,\overline{\in}\,[0;h],\\ \dfrac{2}{h}\left(1-\dfrac{z}{h}\right), & \text{коли } z\in[0;h].\end{cases}$$

Обчислюючи тепер $M[Z]$, одержимо

$$M[Z]=\int_0^h zf_Z(z)dz=\int_0^h z\cdot\frac{2}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)dz=\frac{2}{h}\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3h}\right)\Bigg|_0^h=\frac{h}{3}.$$

Враховуючи, що

$$M[Z]=\int_{\Omega_Z} zP_Z(dz)=\int_{\Omega_Z} zf_Z dz=\iint_{\Omega_{(X,Y)}}\psi(x,y)P_{(X,Y)}(\psi^{-1}(dz))=\iint_{\Omega_{(X,Y)}}\psi(x,y)\,f_{(X,Y)}(x,y)dxdy,$$

де $\Omega_Z=Z(\Omega)$ – образ множини $\Omega_{(X,Y)}$ при відображенні $Z=\psi(x,y)$, $(x,y)\in\Omega_{(X,Y)}$, а також, що в розглядуваному випадку $\Omega=G_{(X,Y)}$, $\Omega_Z=\{z\mid z\in[0;h]\}$,

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{m(G)}, & \text{коли } (x,y)\in G,\\ 0, & \text{коли } (x,y)\,\overline{\in}\,G,\end{cases}$$

одержимо

$$M[Z]=\int_0^h zf_Z(z)dz=\iint_G\psi(x,y)\frac{1}{m(G)}dxdy,$$

звідки $\iint_G\psi(x,y)dxdy=m(G)\cdot M[Z]=m(G)\cdot\dfrac{h}{3}$.

Отже, об'єм конуса дорівнює третині добутку площі його основи на висоту.

Зокрема, якщо в основі конуса круг радіуса *R*, тобто $G=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$, тоді об'єм такого конуса дорівнюватиме

$$V=\iint_G\psi(x,y)dxdy=\frac{1}{3}\pi R^2h.$$

Якщо G – круг радіуса R з центром в початку координат, $G=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$, а конус прямий (вершина конуса проектується в центр круга), тоді функція $\psi(x,y)$ матиме вигляд

$$\psi(x,y)=h\left(1-\frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right),\ (x,y)\in G$$

і за попереднім

$$\iint_G h\left(1-\frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=\frac{1}{3}\pi R^2h.$$

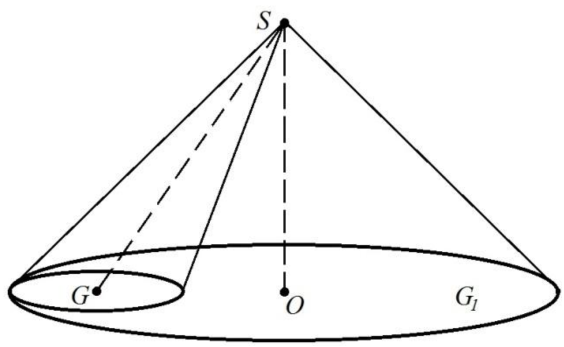

Рис. 7

Якщо вершина конуса проектується за межі його основи, тоді попередні міркування незастосовні, оскільки залежність між змінними x і y та z виявляється неоднозначною – одній і тій самій точці на площині xOy на поверхні конуса може ставитись у відповідність не одна точка. В такому випадку досить розглянути область G_1, таку, що $G \subset G_1$, і крім того вершина конуса проектується в область G_1 (Рис. 7). Тоді отримаємо

$$V_{конуса} = \frac{1}{3}hm(G_1) = \frac{1}{3}hm(G + (G_1 \setminus G)) = \frac{1}{3}hm(G) + \frac{1}{3}hm(G \setminus G_1),$$

де перший доданок – шуканий об'єм, другий доданок – об'єм конуса, доповнюючого конус з основою G до конуса з основою G_1.

Таким чином, формула для обчислення об'єму конуса залишається правильною, хоч функціональної залежності виду $z = \psi(x, y)$ між змінними x, y та z в розглядуваному випадку не існує.

6. Об'єм зрізаного конуса. *На множині* $G \subset R^2$ *задано функцію* $z = \psi(x, y)$, $(x, y) \in G$, *у графічному поданні поверхнею, точки* (x, y, z) *якої задовільняють рівність* $z = \psi(x, y)$, *є поверхня зрізаного конуса з нижньою основою G, верхньою основою* G_1 *і висотою h (Рис. 8). Використовуючи зв'язок між 1-м та 2-м способами обчислення математичного сподівання функції випадкових аргументів (теорему про середнє), вивести формулу для обчислення об'єму зрізаного конуса.*

Нехай конус з основою G і вершиною S зрізано на висоті h (Рис. 8), x – висота конуса, відрізаного від конуса з висотою $h+x$ з тією самою основою, що і у зрізаного конуса.

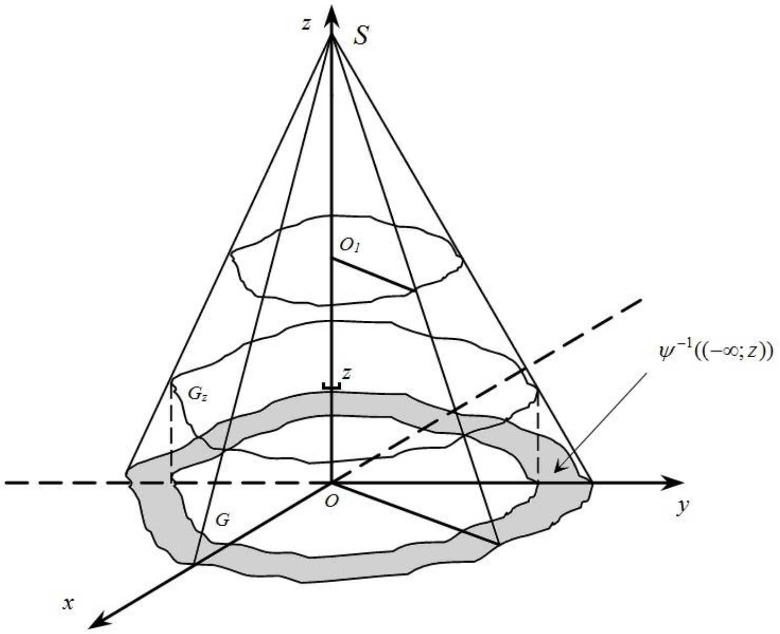

Рис. 8

Тоді за попереднім

$$m(G_Z) = \left(\frac{h + x - z}{h + x}\right)^2 m(G) = \left(1 - \frac{z}{h + x}\right)^2 m(G).$$

Будемо вважати, що на множині G задано рівномірний розподіл ймовірностей із щільністю

$$f_{(X,Y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{m(G)}, & \text{коли } (x, y) \in G, \\ 0, & \text{коли } (x, y) \,\overline{\in}\, G. \end{cases}$$

Тоді функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Z в розглядуваному випадку матимемо вигляд

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, \text{ коли } z \le 0, \\ 1 - \left(1 - \dfrac{z}{h + x}\right)^2, \text{ коли } z \in [0, h), \\ 1, \text{ коли } z > h. \end{cases}$$

В розглядуваному випадку розподіл ймовірностей виявляється мішаним, оскільки функція $F_Z(z)$ змінюється неперервно, коли z змінюється від 0 до h, а в точці $z=h$ отримує відмінний від нуля приріст, рівний

$$1-\left(1-\left(1-\frac{z}{h+x}\right)^2\right)=\left(1-\frac{z}{h+x}\right)^2.$$

При цьому щільність розподілу неперервно розподіленої частини одиничної ймовірності дорівнює

$$\tilde{f}_Z(z)=\begin{cases}0, \text{ коли } z \overline{\in} [0,h],\\ \dfrac{2}{h+z}\left(1-\dfrac{z}{h+x}\right), \text{ коли } z\in[0,h].\end{cases}$$

Центр розсіювання при такому розподілі ймовірностей на множині значень випадкової величини Z (математичне сподівання $M[Z]$) обчислюється за формулою

$$M[Z]=\int_0^h \tilde{f}_Z(z)dz+h\cdot\left(1-\frac{h}{h+x}\right)^2=\int_0^h z\frac{2}{h+x}\left(1-\frac{h}{h+x}\right)dz+h\left(1-\frac{h}{h+x}\right)^2=$$

$$=\frac{2}{h+x}\left(\frac{z^2}{2}-\frac{1}{h+x}\cdot\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^h+h\frac{x^2}{(h+x)^2}=\frac{2}{h+x}\left(\frac{3z^2(h+x)-2z^3}{2\cdot 3\cdot(h+x)}\right)\Bigg|_0^h+h\frac{x^2}{(h+x)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3z^2(h+x)-2h^3)}{(h+x)^2}+h\frac{x^2}{(h+x)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3h^3+3h^2x-2h^3+3hx^2}{(h+x)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{h^3+3h^2x+3hx^2}{(h+x)^2}.$$

Враховуючи формулу (1), для об'єму зрізаного конуса з висотою h, відрізаного від конуса з висотою (h+x) і з основою G одержуємо:

$$V=\iint_G \psi(x,y)dxdy=M(Z)m(G)=\frac{1}{3}\cdot\frac{h^3+3h^2x+3hx^2}{(h+x)^2}m(G).$$

Зокрема, якщо зрізаний конус отриманий відтинанням частини прямого кругового конуса так, що основами зрізаного конуса є круги радіусів R і r (Рис. 9), тоді $\dfrac{h+x}{R}=\dfrac{x}{r}$, звідки $x=\dfrac{hr}{R-r}$.

Тоді

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{h^3+3h^2x+3hx^2}{(h+x)^2}\right)m(G)=\frac{1}{3}hm(G)\left(\frac{h^2+3hx+3x^2}{(h+x)^2}\right)=\frac{1}{3}hm(G)\frac{h^2+3h\dfrac{hr}{R-r}+3\dfrac{h^2r^2}{(R-r)^2}}{\left(h+\dfrac{hr}{R-r}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}hm(G)\frac{h^2+3\dfrac{h^2r}{R-r}+3\dfrac{h^2r^2}{(R-r)^2}}{\left(\dfrac{hR-hr+hr}{R-r}\right)^2}=\frac{1}{3}hm(G)\frac{h^2+3\dfrac{h^2r}{R-r}+3\dfrac{h^2r^2}{(R-r)^2}}{\dfrac{h^2R^2}{(R-r)^2}}=$$

$$=\frac{1}{3}hm(G)\frac{h^2(R-r)^2+3h^2r(R-r)+3h^2r^2}{h^2R^2}=\frac{1}{3}hm(G)\frac{1}{R^2}(R^2-2rR+r^2+3rR-3r^2+3r^2)=$$

$$=\frac{1}{3}hm(G)\frac{1}{R^2}(R^2+rR+r^2)=\frac{1}{3}h\pi R^2\cdot\frac{1}{R^2}(R^2+rR+r^2)=\frac{1}{3}h\pi(R^2+rR+r^2).$$

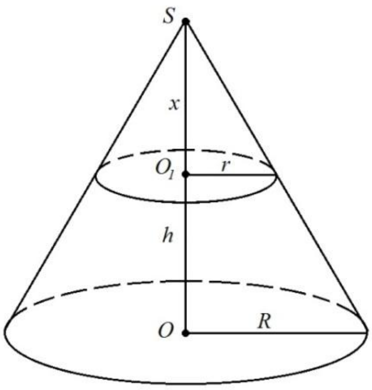

Рис. 9

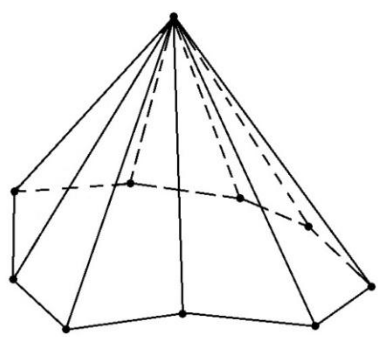
Рис. 10

7. Об'єм піраміди. *Задано функцію* $z = \psi(x, y)$ *на множині G,* $(x, y) \in G$*, де G многокутник з довільною скінченною кількістю сторін, не обов'язково опуклий. В графічному поданні поверхнею, точки* (x, y, z) *якої задовольняють рівність* $z = \psi(x, y)$*, є бічна поверхня піраміди з основою G і висотою h. Використовуючи зв'язок між 1-м та 2-м способами обчислення математичного сподівання функції випадкових аргументів (теорему про середнє), вивести формулу для обчислення об'єму піраміди.*

Оскільки піраміду можна розглядати як конус, твірна якого проходить через вершину *S*, а напрямною лінією є ламана, що обмежує многокутник *G*, який лежить в основі піраміди (Рис. 10), то всі міркування стосовно конуса залишаються застосовними і до піраміди без будь яких змін.

8. Об'єм параболоїда обертання. *Задано функцію* $z = h\left(1 - \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}\right)\right)$, $x^2 + y^2 \le r^2$.

Використовуючи зв'язок між 1-м та 2-м способами обчислення математичного сподівання функції випадкового аргумента (теорему про середнє), вивести формулу для обчислення об'єму параболоїда обертання.

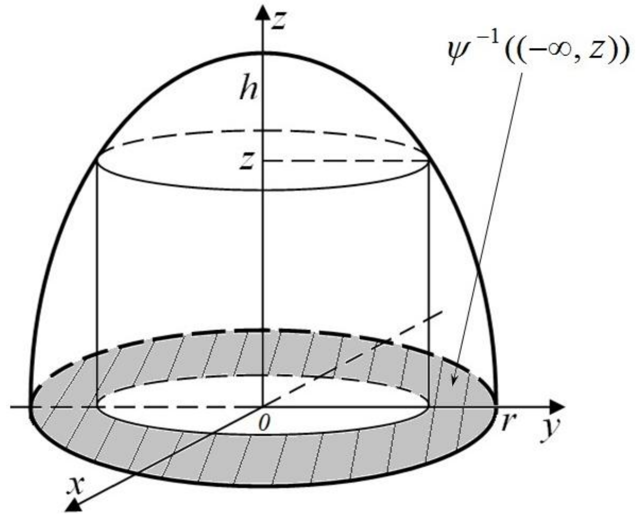

Рис. 11

Враховуючи, що

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & \text{коли } (x, y) \in G, \\ 0, & \text{коли } (x, y) \overline{\in} G \end{cases}$$

а також, що при *x*=0

$$z = h\left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right) \Rightarrow \frac{y^2}{r^2} = 1 - \frac{z}{h}, \quad y = \pm r\sqrt{1 - \frac{z}{h}},$$

одержимо

$$F_Z(y) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ \frac{1}{\pi r^2}\left(\pi r^2 - \pi r^2\left(1 - \frac{z}{h}\right)\right) = \frac{z}{h}, & z \in [0, h], \\ 1, & z \ge h. \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \overline{\in} [0, h], \\ \frac{1}{h}, & z \in [0, h]. \end{cases}$$

$$M[Y] = \int_0^h z \cdot \frac{1}{h} dz = \frac{h}{2}.$$

Враховуючи формулу (1), для об'єму *V* вказаного параболоїда одержуємо

$$V = \iint_G h\left(1 - \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}\right)\right) dxdy = \frac{h}{2} \cdot \pi r^2 = \frac{\pi r^2 h}{2}.$$

9. Об'єм кулі. *Задано функцію* $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x\in[-R,R]$. *Використовуючи зв'язок між 1-м та 2-м способами обчислення математичного сподівання функції випадкового аргумента (теорему про середнє), вивести формулу для обчислення об'єму кулі.*

Враховуючи, що

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2},\ (x,y)\in G,\\ 0,\ (x,y)\overline{\in} G.\end{cases}$$

де G – круг радіуса R, а також, що із виразу $z=\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$, що описує верхню півсферу (Рис. 12), при x=0 одержується $z=\sqrt{R^2-y^2}$, а також $y=\pm r\sqrt{R^2-z^2}$, знаходимо

$$F_Z(z)=\begin{cases}0,\ z\le 0,\\ \dfrac{1}{\pi r^2}\left(\pi r^2-\pi\left(R^2-z^2\right)\right)=\dfrac{z^2}{R^2},\ z\in[0,R],\\ 1,\ z\ge R.\end{cases}\quad f_Z(z)=\begin{cases}0,\ z\overline{\in}[0,R],\\ \dfrac{2z}{R^2},\ z\in[0,R].\end{cases}$$

$$M[Z]=\int_0^R z\cdot\frac{2z}{R^2}\,dz=\frac{2}{R^2}\cdot\frac{z^3}{3}\bigg|_0^R=\frac{2}{3}R.$$

Тому для об'єму верхньої півкулі одержуємо:

$$\int_G\psi(x,y)dxdy=\int_G\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}dxdy=M[Z]\cdot m(G)=\frac{2}{3}R\cdot\pi R^2=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

Звідки об'єм кулі – $V_{кулі}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

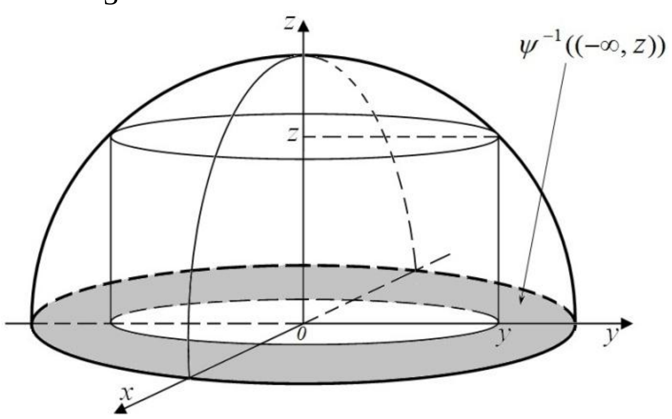

Рис. 12

10. Об'єм еліпсоїда. *Задано функцію* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $x\in[-a,a]$, $y\in[-b,b]$, $x\in[-c,c]$. *Використовуючи зв'язок між 1-м та 2-м способами обчислення математичного сподівання функції випадкового аргумента (теорему про середнє), вивести формулу для обчислення об'єму еліпсоїда.*

Враховуючи, що рівняння верхньої половини поверхні еліпсоїда (Рис. 13), має вигляд $z=c\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)}$, а також, що при x=0 буде $y=\pm b\sqrt{1-\dfrac{z^2}{c^2}}$; при y=0 буде $x=\pm a\sqrt{1-\dfrac{z^2}{c^2}}$, і що в основі розглядуваної фігури лежить еліпс з півосями a та b, одержуємо

$$F_Z(z)=\begin{cases}0,\ z\le 0,\\ \dfrac{1}{\pi ab}\left(\pi ab-\pi ab\sqrt{1-\dfrac{z^2}{c^2}}\sqrt{1-\dfrac{z^2}{c^2}}\right)=1-\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}\right)=\dfrac{z^2}{c^2},\ z\in[0,c],\\ 1,\ z\ge c.\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0,\ z\overline{\in}[0,c],\\ \dfrac{2z}{c^2},\ z\in[0,c].\end{cases}$$

$$M[Z]=2\int_0^c \frac{z^2}{c^2}\,dz = 2\frac{z^3}{3c^2}\Bigg|_0^c = \frac{2z}{3}\Bigg|_0^c = \frac{2}{3}c.$$

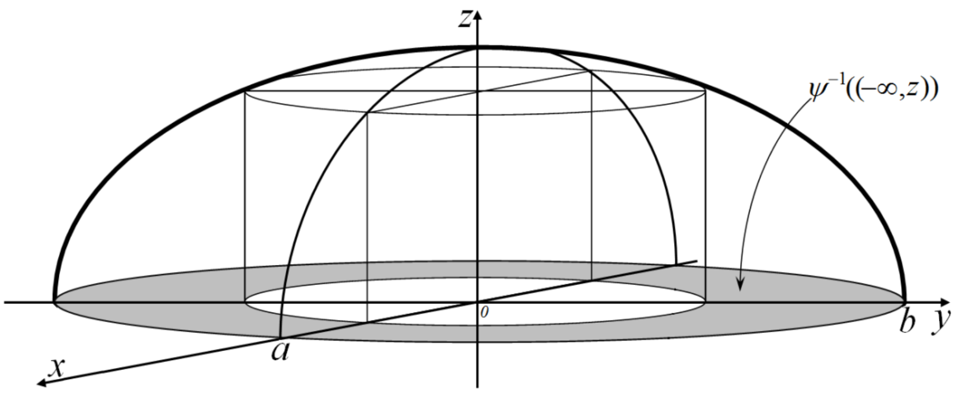

Рис. 13

Отже, $\iint\limits_G \psi(x,y)dxdy = M[Z]\cdot m(G) = \frac{2}{3}c\cdot\pi ab$ – об’єм половини еліпсоїда, звідки $V_{еліпсоїда}=\frac{4}{3}\pi abc$.

Використовуючи зв’язок між першим та другим способом обчислення математичного сподівання функції випадкового аргумента (теорему про середнє), можна розв’язати ряд інших задач такого типу: вивести формулу для обчислення площі паралелограма; вивести формулу для обчислення площі кругового сегмента радіуса R і висотою h; вивести формулу для обчислення об'єму зрізаної піраміди; вивести формулу для обчислення об'єму кульового сегмента радіуса R і висотою h; вивести формулу для обчислення об'єму тора (геометричне тіло, що отримується обертанням кола навколо осі, що лежить у одній площині з колом, але не перетинає його, форма тора зовні нагадує бублик) тощо.

Хоча існують більш раціональні способи розв’язування таких задач, розглядувані вправи спрямовані на те, щоб, по-перше, показати один узагальнений спосіб, який можна використовувати для розв’язування задач на обчислення площ та об’ємів геометричних фігур. По-друге, побудова відповідних малюнків до таких задач розвиває просторову уяву учнів та допомагає закріпити вміння будувати комбінації геометричних тіл у просторі, а також з’ясувати сутність задач на відшукання розподілів ймовірностей на множинах значень випадкових величин, зокрема функцій випадкових аргументів, обчислення числових характеристик таких розподілів ймовірностей, геометричну інтерпретацію відповідних математичних об’єктів, виробити вміння і навички розв’язування відповідних задач.

Література

1. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Михалін Г.О. Теорія ймовірностей і математична статистика: Підручник для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. – Видання друге, перероблене і доповнене – Полтава: «Довкілля-К», 2010 – 500 с.
2. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Михалін Г.О. Збірник задач і вправ з теорії ймовірностей і математичної статистики. Для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. – Полтава: «Довкілля-К», 2010 – 724 с.