Раков С.А., Горох В.П.
Український центр оцінювання якості освіти
Осенков К.О.
Senior Researcher, Microsoft (США)

Роль доведень у навчанні математики та їх підтримка засобами комп'ютерного моделювання у пакетах динамічної геометрії

Кілька думок стосовно доведень у математиці і навчання математики

«Добре доведення те, що робить нас мудрішими».

Юрій Манін, 1981

«Добре доведення дає інсайт для чіткого розуміння, чому твердження справедливе. Такий інсайт може іноді подарувати неочікувану несподіванку, що доведене твердження є тільки частковим випадком більш загального твердження і таким чином дає змогу для безпосереднього узагальнення».

M.D.Villers, 1998

Книга Ж. Пойя «Як розв'язувати математичну задачу» починається з її головної ідеї – трьох фраз (кроків, етапів) розв'язування математичної задачі (дидактична тріада): 1) усвідомлення задачі; 2) розв'язування задачі; 3) систематизація (рефлексія і включення нових знань в систему знань учня).

Три принципи навчання:

1. *Активне вивчення*. Те, що розповідає вчитель в класі, звичайно важливо, але в тисячу разів важливіше те, що думають учні. Ідеї повинні зароджуватися в свідомості учнів, роль же вчителя в цьому процесі можна порівняти з роллю повитухи.

…надайте учням самим відкривати максимум можливого за даних обставин...

…надайте учням можливість брати участь в постановці задачі, яку їм доведеться розв'язувати.

2. *Найкращий стимул навчання* (Стимул – спонука, спонукуюча причина). Вчитель повинен себе бачити в ролі комісіонера, який бажає продати учням трохи математики. Але якщо комісіонер має утруднення із продажем і його товар залежується, бо його клієнти відмовляються його купувати, він не повинен у всьому винуватити покупців…

… І ваш обов'язок, як вчителя, як постачальника знань полягає в тому, щоб *пробудити в учня інтерес до математики, побачити красоту і вишуканість того питання, яке ви як раз зараз розглядаєте*.

Красота і вишуканість – вони включають в себе корисність і практичну значимість? Головне у цьому висловленні Ж.Пойа – *пробудити інтерес до математики*, причому пробудження інтересу не може бути шаблонним, для кожного цей інтерес може бути різним: для одних – це красота і вишуканість (яскравий представник – Герман Вейль з його математичною теорією симетрії, гармонії, краси, тобто математичною теорією естетичної категорії краси і її проявів у живій й неживій природі, науці, мистецтві тощо); для інших – це практична значимість (яскравий представник Альберт Ейнштейн, який все своє життя присвятив побудові загальної теорії поля), для третіх – це інтелектуальний виклик з розв'язування складної проблеми, для четвертих – це упорядкування накопичених знань (яскравий представник – Давід Гілберт, засновника напрямку формалізму у математиці) тощо. У кожної особистості всі ці інтереси наявні, але якийсь з них є домінуючим і відповідає когнітивним особливостям особистості, і тому задача учителя надзвичайно складна, маючи один (або кілька) власних домінуючих типів інтересів у математиці, вміти змоделювати якомога більше інших інтересів і пред'явити їх своїм учням (або краще винайти разом із ними) у надії, що кожен з них знайде найбільш органічний саме для нього різновид інтересу.

3. *Послідовні фази навчання*. Основний недолік шкільних підручників з математики полягає в тому, що набір наявних в них задач зазвичай складається майже виключно з рутинних зразків. … Рутинні приклади, можливо, корисні і необхідні … однак тут відсутні дві важливі фази навчання: фаза дослідження (постановки задачі і формування гіпотези щодо її розв'язування) і фаза засвоєння (систематизації).

Доведення у математиці і навчанні математики

«Навіщо доводити теорему Ньютона-Лейбніца у курсі математичного аналізу – ми що, не довіряємо Ньютону або Лейбніцу?» – так у захваті завзятої дискусії висловлювався один викладач математики у вищому навчальному закладі.

Інший викладач стверджує, що навчання математики у загальноосвітній школі можна звести до запам'ятовуванні 256 формул і «…непотрібно мучити мільйони школярів нікому не потрібними доведеннями у математиці (принаймні непотрібними абсолютній більшості учнів, які не стануть у майбутньому професійними математиками).» Він, спираючись на власний досвід вченого і викладача математики, стверджує, що доведення, у навчанні математики зайві: упродовж довгої наукової діяльності він сам жодного разу не скористався жодним із доведень, які вивчав у школі, університеті, під час підготовки кандидатської дисертації у галузі фізико-математичних дисциплін, під час роботи над докторською дисертацією з педагогіки і упродовж наступної багаторічної наукової діяльності у різноманітних галузях.

Доведення у сучасному курсі математики посідають все меншу роль, все більш популярними стають видання «Геометрія у таблицях», «Алгебра у таблицях», в яких подаються зведені у таблиці довідкові матеріали зі шкільного курсу математики, наводяться типові задачі і алгоритми їх розв'язування.

Все це знаходить відображення у зовнішньому незалежному оцінюванні знань з математики – починаючи з 2010 року з нього вилучені задачі з розгорнутою формою відповіді, і одним з мотивів такого вилучення був факт, що більшість учасників тестування до розв'язування цих задач у 2008 і 2009 роках не приступала.

А і справді, навіщо доведення у математиці, навіщо вивчати доведення у навчанні математики?

Складні питання, оскільки вони ведуть у глибини філософії, гносеології, психології педагогіки і ін., і не мають однозначних остаточних відповідей:

1. Що таке математика? (див. Курант Р., Робінс «Что такое математика?» – книга, написана видатними математиками з метою розкриття внутрішнього світу математики через розгляд і дослідження відомих задач математики (математика як вона є)).
2. Що таке доведення у математиці?
3. Яка мета навчання математики?
4. Яке місце доведень у навчанні математики?

Ці питання у свою чергу ведуть до ще більш загальних питань:

1. Що таке наука?
2. Яке місце у науці посідає математика?
3. Яка мета освіти, загальної освіти?

Ці питання вічні і ніколи не буде знайдено однозначних остаточних відповідей на них, проте кожна розвинена особистість, кожне розвинене суспільство задає і буде постійно задавати собі ці питання і шукати на них відповіді, і саме ці відповіді визначатимуть парадигму особистості і парадигму освітньої системи.

Наукові дослідження, навчальний процес взагалі і навчання математики зокрема відбуваються у відповідних середовищах. Системне поняття середовища, зокрема навчального середовища з математики, відображає сучасні уявлення про спосіб реалізації процесу навчання – у процесі спілкування (діалогу) особистості з іншими суб'єктами навального процесу:

1. Учень
2. Математика
3. Навчальний соціум:
   3.1. Учитель;
   3.2. Однокласники;
   3.3. Батьки;
   3.4. Інші соціуми, до яких входить учень (гуртки, товариші тощо).
4. Методична система навчання математики (математичний курикулум):
   4.1. Цілі навчання;
   4.2. Зміст навчання;
   4.3. Засоби навчання,
   4.4. Методи навчання;
   4.5. Організаційні форми навчання;
   4.6. Критерії оцінювання результатів і система моніторингу якості навчання.
5. ІКТ.

Всі ці питання одночасно спростилися і ускладнилися завдяки використання ІКТ – потужній «складовій» у навчальному середовищі з математики. Більш за те, це складова середовища навчання – ІКТ швидко і невпинно прогресує, спричинюючи зміни всіх інших складових навчального середовища і методичної системи навчання – і змісту, і методів, і засобів та організаційних форм.

Якщо відкинути різноманітні технічні особливості, включно навіть Інтернет і комп'ютерні мобільні засоби, то найбільш потужним на даний момент «порушувачем спокою» у професійних математичних дослідженнях і в навчанні математики є пакети динамічної геометрії (DGS) та пакети комп'ютерної алгебри (CAS), які можна об'єднати в один клас комп'ютерних математичних систем (CMS), які перетворюються (або вже перетворилися) у ядро автоматизованого робочого місця професійного математика (який працює як у галузі теоретичної, так і в галузі прикладної математики), а також у найпотужніший засіб навчання математики.

Коротко сформулюємо сутність поглядів авторів на зазначені вище питання.

1. Математика

1.1. Математика – «мова науки»: абстрактна дисципліна, де вивчаються формальні (математичні) моделі будь-яких явищ природи;

1.2. Математика – це єдина наукова галузь, в якій послідовно використовується аксіоматичний (дедуктивний) метод для доведення істинності математичних тверджень (теорем) або їх спростування за допомогою побудови контрприкладів;

2. Навчання математики

2.1. Мета навчання математики – набуття математичних компетентностей, які мають три виміри:

2.1.1. *Понятійний (концептуальний) вимір* – володіння понятійним апаратом математики, когнітивний рівень – знання (вчитися, щоб знати);

2.1.2. *Діяльнісний вимір* – володіння методами математики (problem solving), що дозволяє розв'язувати задачі (як типові (репродуктивні), так і нестандартні (творчі)), когнітивний рівень – уміння (вчитися, щоб діяти);

2.1.3. *Практично-ціннісний вимір* – усвідомлення місця математики у науці і людській культурі, уміння застосовувати математику до розв'язування задач з реальним змістом (уміння ставити математичну задачу (problem posing)), оцінювати ефективність отриманого розв'язку задачі, порівнювати різні методи розв'язування задачі і обирати розв'язок, який найбільшим чином відповідає системі цінностей сестейного суспільства (sustainable society). Поняття сестейного суспільства як безальтернативної цілі розвитку суспільства і цивілізації у цілому у період глобалізації є провідною ідеєю, яку закладають у національні програми розвитку держав, систем освіти, систем оцінювання якості освіти тощо.

2.2. Методологією компетентнісного навчання математики є дослідницький підхід у навчанні, який відображає методологію математики як науки (образно кажучи, дослідницький є «педагогічною проекцією» професійної дослідницької математичної діяльності):

2.2.1. Аналіз проблеми (реальної життєвої проблеми або математичної проблеми);

2.2.1.1. Усвідомлення проблеми і постановка математичної задачі (problem posing);

2.2.1.2. Побудова математичної моделі задачі (modeling);

2.2.2. Розв'язування математичної задачі (problem solving)

2.2.2.1. Пошук гіпотези щодо розв'язування задачі (евристичне мислення (heuristics));

2.2.2.2. Доведення гіпотези розв'язування задачі (proving) або побудова контрприкладу до гіпотези (contra example constructing);

2.2.2.3. Дослідження розв'язків задачі (exploring);

2.2.3. Систематизація, узагальнення, постановка нових проблем;

2.2.4. Створення автоматичних або автоматизованих систем розв'язування задач.

2.3. Педагогічними засадами освіти, навчання в цілому і навчання математики зокрема є засади соціального конструктивізму, які включають в себе наступні принципи:

2.3.1. *Принцип талановитості*: кожен учень талановитий по-своєму (тобто кожен учень має свої неповторні таланти (зокрема когнітивні), це слід визнавати, на це слід спиратися, сприяти розвиткові індивідуальних талантів, а не намагатися побудувати єдину універсальну методику навчання і універсальні шаблони розумової і навчальної діяльності;

2.3.2. *Принцип колективного резонансу*: пізнання відбувається у рамках різноманітних соціумів, яким належить кожен учень через колективний діалог, результатом якого є колективний резонанс (інтегральний пізнавальний потенціал освітнього соціуму незрівнянно вище суми пізнавальних потенціалів членів соціуму);

2.3.3. *Принцип колективної рефлексії*: ефективність навчального процесу передбачає не тільки колективний резонанс, але і колективну рефлексію – аналіз ефективності різних підходів у навчанні, різних підходів до розв'язування задач, систематизацію і узагальнення набутих знань і умінь, аналіз їх практичної значимості, формування оцінювальних суджень і ціннісних ставлень.

3. Учитель математики

3.1. Роль учителя у сучасному світі радикально змінилася з ролі проповідника готових істин на роль провідника (модератора), який разом зі своїми учнями, відкриває нові факти, творить нові теорії і вибудовує систему знань;

3.2. Місія учителя – реалізація компетентнісної парадигма навчання – учитель на практиці здійснює підготовку компетентного члена суспільства, який поділяє систему цінностей суспільства і сприяє його розвиткові;

3.3. Головна задача вчителя – створення у класі освітнього середовища, в якому і відбувається освітній процес згідно до принципів соціального конструктивізму, в якому кожен учень посідає своє власне і неповторне поважне місце, в якому панує атмосфера пошуку істини і засобами для цього є колективна рефлексія і колективний резонанс;

3.4. Методологія навчання – дослідницький підхід у навчанні.

4. Учень

4.1. Учень – головний суб'єкт навчального процесу (це означає, що саме учень у навчальному процесі постійно робить свій вибір і несе відповідальність за нього);

4.2. Учень – активний член класу, школи, гуртка, сім'ї тощо;

4.3. Мотивація учня (у відповідності з ключовими компетентностями суспільства):

4.3.1. Побудова власної кар'єри

4.3.1.1. Вибір майбутнього фаху і професії;

4.3.1.2. Підготовка до вступу до ВНЗ за вибраним фахом і професією;

4.3.2. Творчість (виконання творчих завдань, проектів) – реалізація себе як творчої особистості;

4.3.3. Задоволення пізнавальних інтересів;

4.3.4. Задоволення культурних і соціальних інтересів.

5. ІКТ у математичному навчанні

5.1. Апаратною основою ІКТ освітнього середовища класу (гуртка, проблемної групи тощо) є власні лептопи учнів і вчителів, об'єднані в єдине освітнє середовище засобами Інтернет. Саме лептоп (iPad) – пристрій, який завжди з учнем (вчителем), який налаштований за уподобаннями учня, на якому інстальовані і налаштовані відповідним чином потрібні пакети, який має вихід до Інтернет, забезпечуючи доступ до інформаційних ресурсів світу і забезпечуючи функціонування віртуальних освітніх спільнот. Критикам, які зі скепсисом сприймуть ці слова, можна заперечити тільки одним аргументом – 10 (і навіть 5) років тому здавалося неймовірним, що кожен учень буде мати мобільний телефон, а зараз здається неймовірним залишитись на деякий час (дослівно час) без мобільного телефону. Таким чином, технологічні проблеми будуть розв'язані самі собою, головним викликом для освітян є освоєння інформаційних ресурсів Інтернет для навчання, наповнення (у тому числі і створення) інформаційних освітніх ресурсів навчального закладу, розробка методик ефективного використання інформаційних освітніх ресурсів у навчальному процесі. Про комп'ютерні класи школи загального призначення і навіть спеціалізовані мікрокомп'ютерні математичні лабораторії слід забути – їх змінять освітні середовища на базі індивідуальних лептопів учня, які завжди при них, які налаштовані на індивідуальні потреби і смак учнів, на яких інстальовані всі потрібні пакети, які об'єднані в єдину мережу;

5.2. Програмною основою ІКТ освітнього середовища з математики є КМС (комп'ютерні математичні системи) для підтримки комп'ютерного моделювання з математики - системи комп'ютерної підтримки дослідницького підходу у навчанні математики;

5.3. ІКТ освітнє середовище багатофункціональне (навіть універсально функціональне):

5.3.1. Доступ до інформаційних ресурсів Інтернет;

5.3.2. Доступ до освітніх інформаційних ресурсів Інтернет;

5.3.3. Універсальний засіб для створення власних інформаційних ресурсів (школи, класу, проблемної навчально-дослідницької групи, індивідуальних);

5.3.4. Інструмент для створення віртуальних освітніх середовищ для підтримки інтерактивних діалогових форм навчання;

5.3.5. Інструмент для підтримки дослідницького підходу у навчанні через комп'ютерне моделювання і проведення комп'ютерних експериментів;

Ідеї дослідницького підходу у навчанні математики не нові, проте його послідовне застосування є трудомістким і при відсутності засобів автоматизації різних складових навчальних досліджень його ефективне використання неможливе. Використання КМС (комп'ютерних математичних систем) надає таку можливість, проте це потребує систематичного вивчення і використання їх у навчальному процесі, такі можливості відкриваються тільки тепер з широким розповсюдженням лептопів і доступу до Інтернет. Перші три складові дослідницького підходу у навчанні є розвиненням ідей трьох фаз розв'язування задачі Ж. Пойа, а четверта складова – створення автоматичного розв'язувача задач відбражає нові можливості, які з'являються з впровадженням ІКТ і відображають також ідеї конструкціонізму Сеймура Пейперта у навчанні, згідно якому конструкторська діяльність учня є потужним стимулом розвитку особистості і опанування особистістю предметної галузі. Сеймур Пейперт визначає конструкціонізм наступним чином: "Слово *конструкціонізм* мнемонічно споріднене до двох аспектів засад природничої (природничо-математичної галузі знань. З конструкціоністських психологічних теорій ми взяли бачення навчання (учіння) як реконструкцію людського знання. а не передавання (викладання) знань. Ми також поширили ідею наочних і маніпулятивних навчальних матеріалів до ідеї, що навчання найбільш ефективне, коли воно є складовою досвіду, якого набуває учень у процесі конструювання осмислених об'єктів.

Роль доведень у математиці і навчанні математики

1. Доведення як інструмент верифікації математичних закономірностей

Ця функція доведень у математиці не викликає ніяких сумнівів. На питання: «Яка роль доведень у математиці» абсолютна більшість відповідей саме така: «Для доведення правильності математичних тверджень або їх спростування». І це правильно, тому що математика – це єдина з наук, в якій доведення (виводимість з системи аксіом) виступає виключним критерієм істинності будь-якого факту. Разом із тим визнання головної ролі доведень як інструменту верифікації фактів у навчанні математики викликає сумнів з багатьох причин: неможливість з різних причин проведення доведень на достатньо високому рівні строгості, трудомісткість побудови курсу математики із строгим дотриманням дедуктивних принципів тощо.

ІКТ і доведення як інструмент верифікації математичних закономірностей

♦ *Автоматизувати (алгоритмізувати) процес доведення математичних теорем неможливо - теорема А.Чорча стверджує: «Теорії першого порядку не є розв'язуваними – не існує алгоритму, за яким можна визначити, яке твердження є теоремою, а яке ні (теорії першого порядку включають в себе арифметику і геометрію, алгебру і ін.)»;*

♦ *За допомогою пакетів символьних обчислень можна автоматично виконувати символьні перетворення і проводити точні обчислення, що дозволяє їх використовувати для автоматизованого доведення математичних теорем. Автоматизованість на відміну від автоматичності означає, що кроки символьних перетворень визначає математик, а самі перетвореня виконуються автоматично. (див., наприклад, Горох В.П., Раков С.А. «Задача про три квадрати»);*

♦ *Пошук доведення математичного твердження невіддільний від спроб побудувати контр приклади. Використання КМС дозволяє будувати аналітичні або геометричні моделі точніше і досліджувати швидко і точно велику кількість часткових випадків, тим самим знаходити контрприклади або закономірності.*

Комп'ютері математичні системи можна ефективно використовувати при доведенні або спростуванні математичних тверджень, зокрема:

- ♦ ***Конструктивне усвідомлення математичного твердження*** *через побудову динамічної комп'ютерної моделі досліджуваного об'єкту (побудова комп'ютерної моделі та її верифікація);*
- ♦ ***Евристичний експериментальний пошук закономірностей*** *у математичній конфігурації або побудова контрприкладів;*
- ♦ ***Автоматизовані символьні перетворення*** *(для проведення складних аналітичних перетворень і точних обчислень).*

2. Доведення як інструмент пояснення у математиці

Доведення відповідають на питання: «Чому відповідне твердження (теорема) правильне?». Тим самим математичні факти приводяться у систему, що є надзвичайно важливим як для самої математики, так і для навчання математики – без доведень математика перетворюється у збірку фактів і типових алгоритмів розв'язування типових задач.

ІКТ і доведення як інструмент пояснення у математиці

- ♦ *За допомогою комп'ютерних моделей все більше і більше проблем можуть бути доведені за допомогою аналітичних (символьних) обчислень, або комбінованим методом: наприклад, переборними алгоритмами для випадків малої розмірності і аналітичним доведенням для великих розмінностей.* Комбінованим методом, наприклад, було розв'язано відому задачу чотирьох фарб (для правильного розфарбування будь-якої мапи на площині достатньо чотирьох фарб).

- ♦ *Точність комп'ютерного моделювання дозволяє експериментально підтверджувати або спростовувати правильність математичних тверджень з високим ступенем точності і для великої кількості випадків.*
- ♦ *У результаті комп'ютерних експериментів у дослідника психологічно може не залишатися сумнівів, що факт дійсно має місце, а для застосувань – надаючи свідчення і точність наявності факту для конкретних випадків. Комп'ютерні експерименти переконують, що для величезної кількості конкретних випадків математичний факт має місце у межах точності наближених обчислень або навіть абсолютно точно у випадку символьних обчислень. Проте ці експерименти не доводять, що у якомусь частковому випадку цей факт залишиться правильним.*

ІКТ і доведення як інструмент пояснення у математиці

1. Доведення математичних тверджень дозволяє відповісти не тільки на питання що істинне або хибне але і більш за те – відповісти на питання, чому твердження істинне або хибне.
2. Доведення також повинно дати переконливу відповідь на питання чому твердження істинне і передбачає аргументи, які є переконливими для конкретного суб'єкта (учня, студента, науковця), які відповідають його типу мислення, його типу інтуїції, його досвіду тощо, іншими словами – переконливе доведення індивідуальне. Звідси випливає потреба в різних способах доведень. Досить згадати безліч доведень теореми Піфагора – геометричних, алгебраїчних, кожне з яких відповідає стилю мислення автора і кожне з яких знайде користувача того, для якого саме це доведення буде найбільш переконливим.
3. Доведення також повинно відповісти на питання як доведення було відкрите – це дуже важливо для набуття математичних компетентностей, оскільки вони складається не тільки з розуміння готових теорій і застосування їх для розв'язування типових задач, але у своєму найвищому прояві – відкриття нових фактів, розв'язування нестандартних задач, застосування математики у нових ситуаціях.
4. Використання КМС завдяки можливостям моделювання підвищує ефективність пошуку доведень та їх представлення.

Інші функції доведень у математиці і навчанні математики ми окреслимо тільки схематично, що зовсім не свідчить про їх меншовартість.

3. Доведення як інструмент відкриття у математиці

У процесі побудови та верифікації комп'ютерної моделі задачі дослідник або учень розуміє глибше, конструктивніше задачу, що є передумовою її успішного розв'язування.

У процесі проведення комп'ютерних експериментів з комп'ютерною моделлю задачі можуть бути відкриті закономірності, що сприяють знаходженню доведення досліджуваної задачі, формуванню нових гіпотез (тобто ефективно стимулювати як доведення або спростування відомих гіпотез, так і постановку (відкриття) нових).

4. Доведення як стимул проведення досліджень

Сутність людського інтелекту є творчість, вищим проявом якої є розв'язування проблем (існуючих або тих, які вже актуальні, проте ще не осмислені людством) і математичні задачі, математичні проблеми є для багатьох викликом, стимулом для досліджень, який є значно потужнішим, ніж складання пазлів або відгадування кросвордів; наприклад, пошук доведення проблеми Ферма три сторіччя стимулювала математиків і розвиток математики; пошук розв'язку математичної задачі є стимулом для проведення навчальних досліджень.

5. Доведення як інструмент повідомлення математичних закономірностей іншим людям та іншим поколінням

Математичні знання – це не тільки перелік відкритих математичних фактів, а система, яка включає в себе разом із фактами їх доведеннями, які відповідають на питання що істинне, чому воно істинне, як доведення було відкрите?

6. Доведення як інструмент систематизації (встановлення причинно-наслідкових відносин)

7. Доведення як інструмент систематизації (узагальнення)

Аналіз знайденого доведення і умов його застосування часто призводить до узагальнення теореми.

8. Доведення як зразки логічних міркувань

Набуття математичних компетентностей є задачею сучасної математичної освіти, яка включає в себе володіння математичним дедуктивним методом, і доведення відіграють важливу роль у навчанні на компетентнісних засадах; так «Початки» Евкліда упродовж двох тисячоліть виконували не тільки роль підручника геометрії, а і роль підручника дедуктивного, аксіоматичного методу.

Доведення у математиці і навчанні математики та пакети динамічної геометрії

Використання комп’ютерних математичних систем (КМС) змінює характер професійної математичної діяльності як у галузі теоретичної, так і в галузі прикладної математики, і тим самим є підґрунтям для застосування дослідницького підходу у навчанні математики на основі комп’ютерного моделювання і дослідницьких експериментів з комп’ютерними моделями (як було вже зауважено, дослідницький підхід у навчанні є «педагогічною проекцією» професійної математичної діяльності на навчальний процес). Виключенням не є доведення у математиці у всіх зазначених вище функціях доведення – КМС можуть бути ефективно використані для верифікації математичних тверджень (або побудови контрприкладів для них), пояснення математичних фактів, використовуватись як інструмент і стимул відкриття нових результатів та їх систематизації, як зразки логічно строгих тестувань. Для того, щоб не повторюватись і не вдаватись до зайвих теоретизувань, розглянемо як модельну одну геометричну задачу дослідницького характеру і у ході її розв’язування проілюструємо можливі шляхи використання комп’ютерного моделювання у середовищі пакета динамічної геометрії DG.

Задача Штейнера.

Для довільного трикутника знайти точку, для якої сума відстаней до вершин трикутника мінімальна. Така точка (як буде показано нижче, вона існує для довільного трикутника) називається точкою Штейнера.

Окреслимо можливий шлях розв’язування задачі 1 з використанням комп’ютерних моделей, спираючись на дидактичну тріаду Ж. Пойа (три фази (кроки, етапи) розв’язування математично задачі: 1. усвідомлення задачі, 2. розв’язування задачі, 3. систематизація (рефлексія і включення нових знань у систему знань учня), розширену четвертим етапом – розробкою автоматизованого розв’язувача задачі Штейнера.

Крок 1: Аналіз (усвідомлення) постановки задачі і формування гіпотези розв’язування задачі

Для експериментального пошуку точки Штейнера можна скористатися динамічним кресленням і експериментально дійти з високим ступенем ймовірності до гіпотези щодо точки Штейнера S :

- S – це точка, з якої всі сторони трикутника видно під кутом $120°$, якщо всі кути трикутника менше $120°$;
- S – співпадає з вершиною найбільшого кута трикутника, якщо один з кутів трикутника більше або дорівнює $120°$.

Динамічну модель для експериментів наведено на рисунку 1.

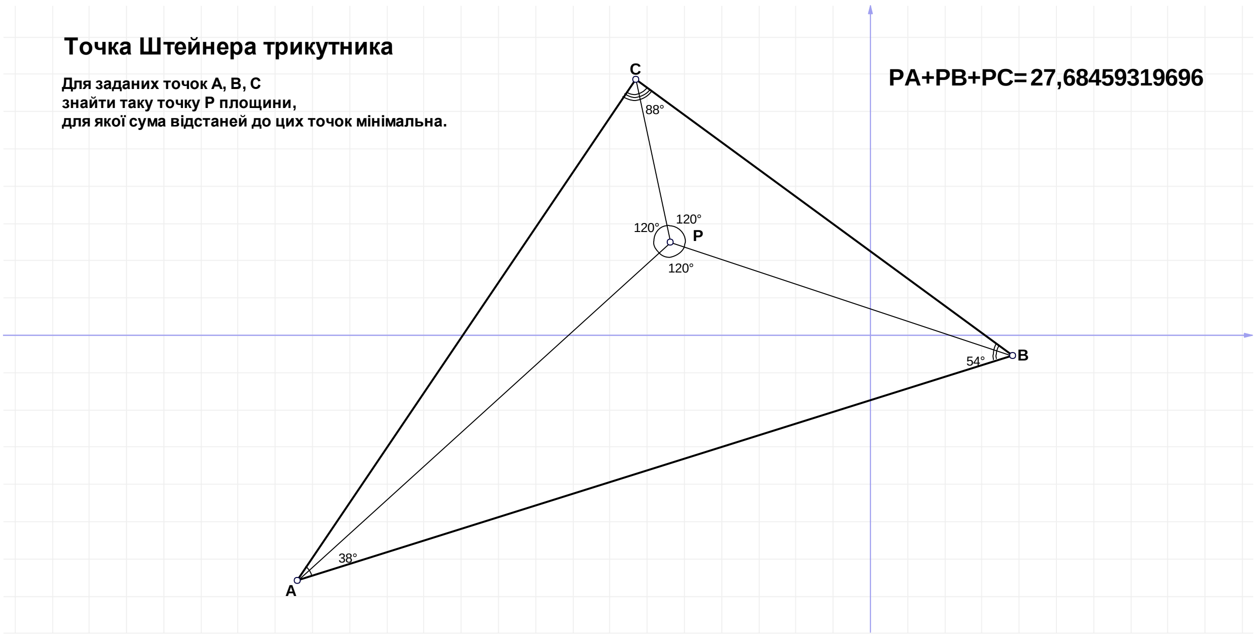

Рис. 1. Динамічний рисунок для експериментального пошуку точки Штейнера трикутника.

Зауваження

Експеримент можна проводити у автоматизованому режимі, використовуючи динамічний рисунок, екран якого наведено на Рисунку 1:

1. Експериментально дослідити конкретний гострокутний трикутник АВС:

1.1. Обрати довільний трикутник ABC, рухаючи вершини цього трикутника;

1.2. Рухаючи точку P знайти точку Штейнера цього трикутника (відстежуючи суму відстаней до вершин трикутника за допомогою динамічного надпису);

1.3. Дослідити обрану оптимальну конфігурацію і сформулювати гіпотезу: *для гострокутного трикутника з точки Штейнера P сторони трикутника видні під кутами 120°*;

2. Перевірити гіпотезу для гострокутних трикутників;

2.1. Перевірити правильність гіпотези про характеристичні властивості точки Штейнера для різних трикутників ABC, використовуючи для цього динамічний рисунок 1;

3. Дослідити межі правильності гіпотези (наявність у трикутнику кута, який більший, ніж 120°);

4. Дослідити точку Штейнера тупокутного трикутника з тупим кутом, більшим або рівним 120°.

Крок 2: доведення гіпотези (теореми Штейнера)

Доведення теореми Штейнера можна провести, спираючись на наступну лему, формулювання якої, її доведення разом із динамічною моделлю для експериментів наведено на Рисунку 2 (доведення леми спирається на властивість точки Герона. Точкою Герона P заданої прямої l на площині і двох точок A і B, що лежать по один бік від цієї прямої називається точка прямої P, для якої сума відстаней $AP+BP$ досягає мінімуму. Відомо (доведення приписується Герону), що для точки P Герона кути, що утворюють відрізки AP і BP з прямою l рівні між собою).

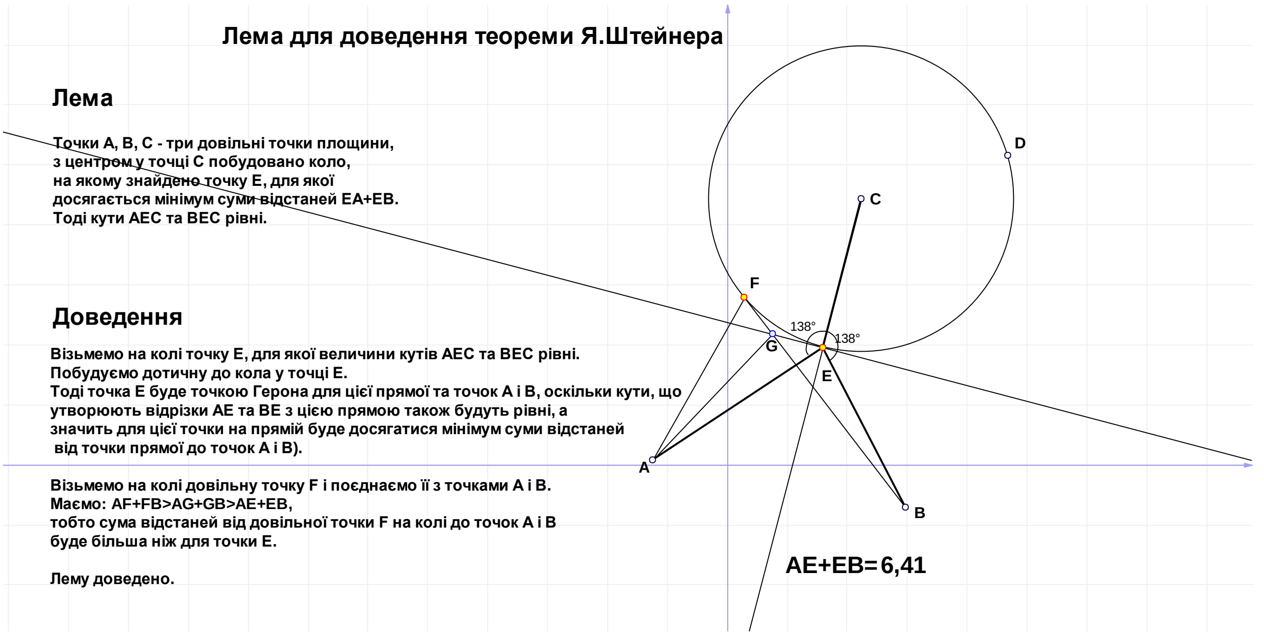

Рис. 2. Лема для доведення теореми Штейнера.

Доведення теореми Я.Штейнера на основі попередньої леми (для випадку трикутників, всі кути яких менше $120°$) проводиться від супротивного: припустимо що точка Штейнера трикутника ABC існує і хоча б один з трьох кутів, під якими видно сторони трикутника ABC, не дорівнює $120°$. Тоді з цього випливає, що серед цих трьох кутів є два нерівних, а це суперечить доведеній лемі.

Існування точки Штейнера для трикутника, в якому всі кути менше 120°, можна довести наступним чином: побудувати два кола, для яких відповідно сторони AB і AC трикутника стягують дуги у 120°; точка перетину цих кіл і буде точкою Штейнера трикутника ABC.

Крок 3. Систематизація

При дослідженні конфігурацій на мінімальність якоїсь лінійної величини часто використовують теорему, в якій стверджується, що довжина будь-якого відрізка прямої менша, ніж довжина будь-якої ламаної, що стягує кінці цього відрізка (Доведення цієї теореми можна провести за методом математичної індукції, спираючись на нерівність трикутника). Тому на етапі систематизації природно спробувати побудувати якимось чином відрізок прямої, який складається з трьох відрізків KA, KB, KC де K – точка Штейнера трикутника ABC (як і у попередніх випадках розглядається випадок, коли всі кути трикутника ABC менші $120°$). Це можна зробити, наприклад, наступним чином: на промені BK від вершини B відкладемо послідовно відрізки BK, KQ, і QF, де відрізок KQ дорівнює відрізку KC, а відрізок QF дорівнює відрізку KA. Тоді точка F є вершиною правильного трикутника, побудованого на стороні AC трикутника ABC ззовні від нього – це випливає з конгруентності трикутників CKA і CKF (трикутник CKF є образом трикутника CKA при повороті навколо точки C на 60°).

За допомогою наведеної конструкції наочним стає те, що точка, з якої всі сторони трикутника видно під кутом 120°, є точкою Штейнера цього трикутника: для будь-якої іншої точки K_1, що відмінна від точки K, сума відстаней $K_1A+K_1B+K_1C$ буде дорівнювати довжині ламаної, що поєднує точки B і F (допоміжною побудовою для її отримання є поворот трикутника K_1AC навколо точки C на 60° проти годинникової стрілки).

На Рисунку 3 наведено динамічна модель для відповідної теореми, яку можна використовувати для комп'ютерних експериментів і пошуку доведення цієї теореми.

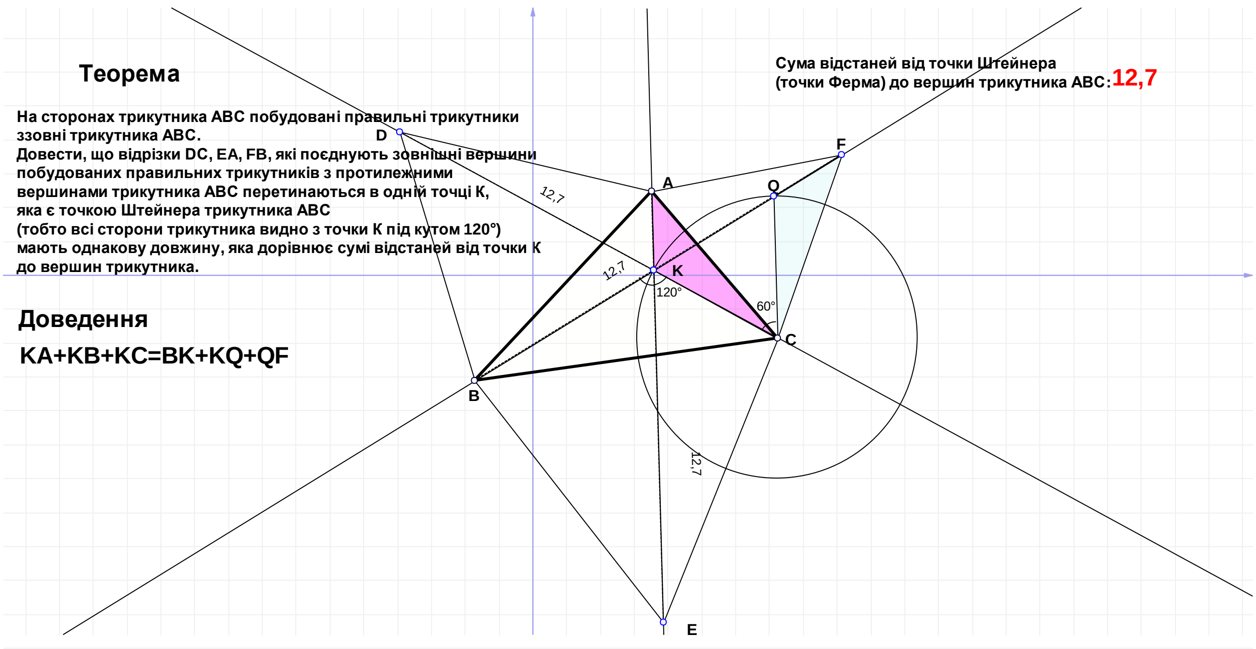

Рис. 3. Систематизація (точка Штейнера трикутника)

Зауважимо, що у процесі пошуку нового доведення теореми Штейнера було *відкрито* нові факти – три відрізки AE, BF і CD, що поєднують вершини трикутника з вершинами правильних трикутників, що побудовані на протилежних до них сторонах ззовні вихідного трикутника є:

- рівними і їх довжина дорівнює сумі відстаней точки Штейнера трикутника до його вершин;
- конкурентними (перетинаються в одній точці – точці Штейнера трикутника).

Розв'язок задачі 2 дає ефективний метод побудови точки Штейнера трикутника (який належить Торичелі) (9 елементарних операцій):

1. Побудувати точку E (три операції):
   1.1. побудувати коло з вершиною у точці B і радіусом BC;
   1.2. побудувати коло з вершиною у точці C і радіусом BC;
   1.3. побудувати точку E як точку перетину двох побудованих кіл.
2. Побудувати пряму AE (одна операція);
3. Побудувати точку F (три операції):
   3.1. побудувати коло з вершиною у точці A і радіусом AC;
   3.2. побудувати коло з вершиною у точці C і радіусом AC;
   3.3. побудувати точку F як точку перетину двох побудованих кіл.
4. Побудувати пряму BF (одна операція);
5. Побудувати точку Штейнера трикутника ABC (одна операція).

Заодно було також побудовано відрізок, довжина якого дорівнює сумі відстаней від точки Штейнера до вершин трикутника ABC.

Крок 4: Побудова автоматичного розв'язувача задачі Штейнера

1. *Автоматичне розв'язування на основі аналітичного розв'язку:*

Визначити, чи існує у заданого трикутника кут величиною більше 120°, наприклад, за теоремою косинусів: перевірити, що виконуються нерівності (враховуючи, що $\cos 60° = \frac{1}{2}$):

Умову того, що всі кути менше 120°, аналітично можна виразити так: ($a^2 < b^2 + c^2 - ab$) і ($b^2 < a^2 + c^2 - ac$) і ($c^2 < a^2 + b^2 - ab$).

Якщо ця умова не виконується, то точкою Штейнера буде вершина кута більшого або рівного 120°, у протилежному випадку точкою Штейнера буде точка перетину двох кіл, для яких центральні кути, що спираються на будь-які дві сторони трикутника дорівнюють 120°. Для аналітичного розв’язку краще точку Штейнера шукати не як точку перетину цих кіл, а як точку перетину двох прямих AB_1 та BC_1, де точки A_1, B_1, C_1 визначаються як:

A_1: результат повороту точки A навколо точки B проти годинникової стрілки на 60°;

B_1: результат повороту точки B навколо точки C проти годинникової стрілки на 60°;

C_1: результат повороту точки C навколо точки A проти годинникової стрілки на 60°;

Після знаходження аналітичних виразів для координат точки Штейнера трикутника можна розробити програму, яка за координатами трьох вершин трикутника повертає координати його точки Штейнера (Пошук аналітичних виразів для координат точки Штейнера трикутника, щоб не помилитися у тотожних перетвореннях, краще шукати за допомогою будь-якого пакета комп’ютерної алгебри (CAS), наприклад, пакета Derive).

2. Автоматизоване розв’язування задачі Штейнера за допомогою динамічної моделі у середовищі пакета динамічної геометрії DG

Рис. 4. Експертна система "Точка Штейнера трикутника"

Варіант експертної системи «Точка Штейнера трикутника» подано на Рис. 4.

Експертна система "Точка Штейнера-1" призначена:

1. Для автоматизованої побудови трикутника за двома сторонами і кутом між ними і для автоматичного знаходження точки Штейнера для побудованого трикутника;
2. Для автоматичного визначення параметрів побудованої конфігурації;
3. Для дослідження властивостей точки Штейнера (зокрема меж характеристичної властивості точки Штейнера: величини кутів, під якими видно сторони трикутника).

Наполеон Бонапарт, Альберт Ейнштейн, Петро I і інформатизація освіти

Обговорюючи теорему Штейнера важко не згадати теорему Наполеона.

Французький імператор Наполеон Бонапарт захоплювався геометрією, відвідував засідання Французької академії наук і відкрив кілька теорем, найбільш відомою з яких є теорема про трикутник, який згодом було названо трикутником Наполеона. Формулювання і схему доведення цієї теореми подано на Рисунку 5.

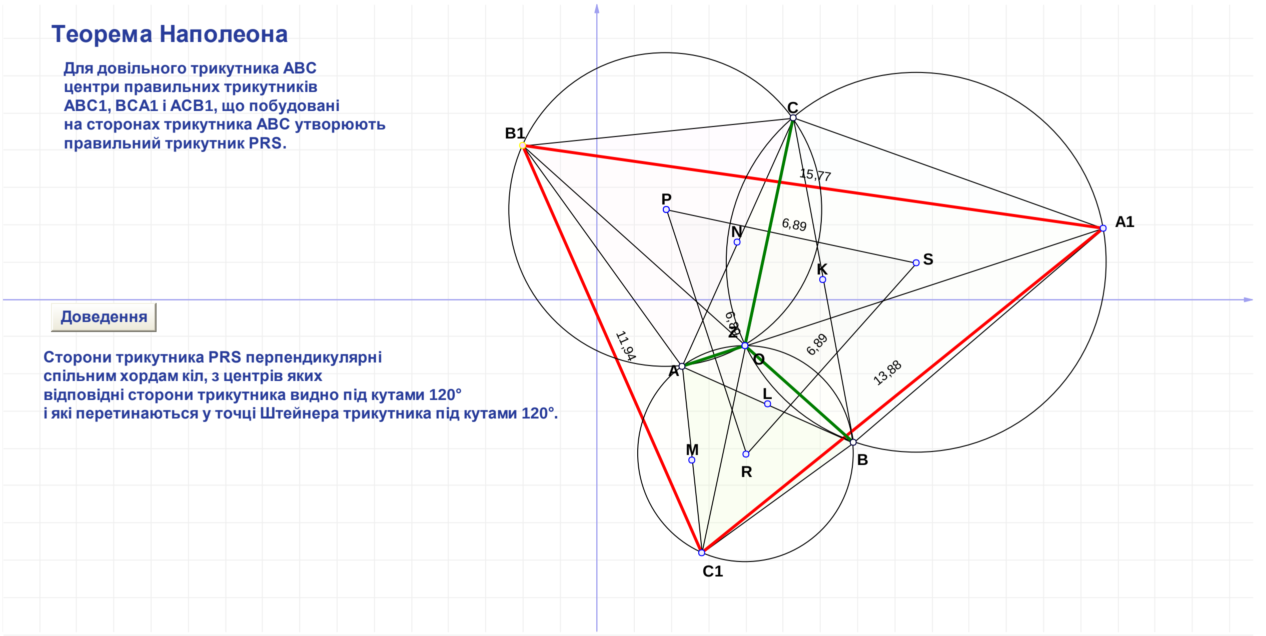

Рис. 5. Теорема Наполеона

Невідомо, який хід думок був у Наполеона Бонапарта при відкритті цієї теореми, проте можна допустити, що додаткові побудови (у даному випадку – побудови кіл, що проходять через точку Штейнера і дві вершини трикутника) і дослідження отриманої конфігурації були вирішальним моментом цього відкриття і доведення його правильності.

Зважаючи, що геометричні побудови, перетворення і вимірювання у середовищах пакетів динамічної геометрії є надзвичайно точні, виразні і динамічні у порівнянні з «ручними», можна припустити, що Наполеон Бонапарт, і всі математики, як професіонали, так і дилетанти-непрофісіонали (слово *дилетант* грецького походження і означає *любитель)*, могли відкрити більше геометричних теорем, якщо б у їх розпорядженні були пакети динамічної геометрії.

Наполеон Бонапарт, здається, був підкорений у першу чергу логічною і естетичною стороною геометрії.

Альберт Ейнштейн у одинадцятирічному віці був вражений методологічною і гносеологічною потужністю геометрії – він був у захваті від того, що властивості об’єктів можна відкривати і доводити, не звертаючись до експерименту, а потім в експерименті все, що було відкрите уявно і доведене дедуктивно, буде імперативно підтверджуватись. Ймовірно саме це було потужним стимулом розвитку його інтелекту і спрямувало світогляд, який і привів його до створення релятивістської теорії.

Російський імператор Петро I захоплювався прикладними аспектами геометрії, можливо, його можна навіть назвати першим російським геометром: у 2010 році у Росії у рамках проекту «Книжное наследие» видане репринтне перевидання перекладу 1709 року російською мовою підручника з геометрії «Приемы циркуля и линейки» (Антон Эрнст Бурикард фон Пюркенштейна, «Книжное наследие», 2010, 368 стр.). Переклад виконував відомий державний діяч і вчений Росії Яков Брюс, редактором перекладу виступав Петро I, якому особисто належить ряд геометричних термінів, а також, гадано, оригінальні статті про геометрію сонячного годинника (Веб-ресурс: http://www.lomonosov-books.ru/priemy.html). Зазначимо також, що редактурою Петро I переймався під час воєнних походів у російсько-шведській кампанії, а ставлення до геометрії Петра було як до нагальної прикладної науки, тому видання було виконано таким чином, щоб кожний інженер або підрядчик міг завжди мати при собі цей підручник – ця книжка повинна була бути «захалявною» (розміщатися у халявах чобіт). Виникають прямі паралелі з пакетами КМС (пакетами динамічної геометрії та комп’ютерної алгебри) – вони повинні бути у власному лептопі учня і вчителя, завжди готові для використання (образно кажучи «захалявними»).

Геометрія багатолика і те, що геометричне мислення важливе для фахівців багатьох галузей: науковців, конструкторів, архітекторів, дизайнерів, художників, не викликає сумнівів. Геометричне мислення означає здатність будувати когнітивні геометричні моделі (які є тим потужнішими, чим більше вони є динамічними) і за допомогою уявних експериментів з цими моделями пізнавати світ, відкривати і моделювати його закономірності, застосовувати їх для розв’язування практичних задач. Використовуючи пакети динамічної геометрії, можна «матеріалізувати» уявні математичні моделі у вигляді комп’ютерних динамічних моделей.

Висновки

1. В Україні відсутня система оцінювання і моніторингу якості освіти на національному рівні і тому об'єктивних показників якості стану математичної освіти немає.
2. Результати участі України в міжнародному досліджені TIMSS-2007 (The Trends in Mathematics and Science Study) свідчать про низький рівень освіти в Україні з математики і природознавчих дисциплін.
3. Аналіз результатів зовнішнього незалежного оцінювання з математики свідчить про низький рівень підготовки багатьох випускників загальноосвітніх навчальних закладів і їх неготовність до отримання вищої освіти.
4. Рівень комп'ютерної і телекомунікаційної інфраструктури в Україні розвивається швидкими темпами і дозволяє реалізувати у найближчий час 100% забезпечення учнів, студентів, вчителів і викладачів ВНЗ потужними лептопами з швидким доступом до Інтернет.
5. В Україні є свої пакети динамічної геометрії: DG, Gran-2D, Gran -3D, які є безкоштовними, сертифікованими і рекомендованими МОНМСУ до використання у навчальному процесі, до яких розроблені посібники як для вчителів, так і для учнів.
6. Для ефективного і масового використання пакетів динамічної геометрії у школі слід запровадити державну цільову програму з підготовки і перепідготовки вчителів математики з питань удосконалення математичної освіти на компетентнісних засадах, основою якого є комп'ютерне моделювання у КМС і проведення навчальних досліджень, що дозволить на практиці перейти від малоефективного репродуктивного навчання до творчого набуття математичних компетентностей.

Проблеми запровадження ІКТ у навчання математики в Україні і приклад Таїланду

Пройшов, на жаль, той час, коли математична освіта на теренах бувшого СРСР визнавалася за найкращу у світі, що образно виразив Президент США Джон Кеннеді у 1961 році (після успішних запусків ракет у космос в СРСР): «Американці, вчіть математику, інакше ви будете вимушені вивчати російську мову».

За результатами міжнародних досліджень якості математичної і природничої освіти TIMSS, PISA лідерами математичної освіти у світі є країни Східної Азії: Піденна Корея, Сінгапур, Тайвань, Японія і до них швидко підтягуються інші країни цього регіону: Китай, Таїланд, Філіппіни.

Характерною особливістю цих країн є побудова навчання математики на компетентнісних засадах: використання і застосування математики, задачний та генетичний підхід у вивченні математики (у порівнянні з більш репродуктивними, знаннєвими засадами, на що орієнтуються більшість країн Європи і світу).

Один із «східних драконів» (країн, які швидко розвиваються на засадах сестейного, інноваційного суспільства) є Таїланд, який 24-28 серпня 2010 року у м. Бангкоку - столиці Таїланду приймав 37 щорічну конференцію Міжнародної асоціації з освітніх вимірювань IAEA-2010 за участі майже 400 учасників з 37 країн світу. На місцевому рівні цю конференцію організовувала організація IPST (Institute for Promotion of Teaching Science and Technology (Інститут Сприяння Навчанню Природознавства і Технологій)), який було створено у 1972 році за фінансового та технологічного співробітництва з Програмою Розвитку Організації Об'єднаних Націй (UNDP) з метою модернізації освіти у галузі природознавства, математики і технологій. З 1998 року інститут працює як державна установа за безпосереднім керуванням Міністерства освіти Таїланду.

Досвід сприяння використання ІКТ у математичній освіті є цікавим для України.

Програми і головні досягнення IPST

1. Сприяння науковим дослідженням, вивченню стану і передового досвіду зі змісту і навчального середовища у галузі освіти з природознавства, математики і технологій;

2. Сприяння розвитку курикулуму, підготовки вчителів, учнів та допоміжного персоналу у галузі освіти з природознавства, математики і технологій;

3. Наукові дослідження та удосконалення освітніх матеріалів та обладнання у галузі освіти з природознавства, математики і технологій;

4. Оцінювання досягнення стандартів у галузі освіти з природознавства, математики і технологій;

5. Сприяння застосуванням ІКТ у галузі освіти з природознавства, математики і технологій:
   - 5.1. **Підготовка у галузі динамічної геометрії** (GSP (Geometer Sketchpad Training)) – організація у кооперації з провідними регіональними університетами більше 40 GSP навчальних центрів по всій країні;
   - 5.2. **Сприяння використанню ІКТ через участь у таких проектах як GLOBE** (Global Learning and Observations to Benefit the Environment (Глобальна освіта і спостереження для блага оточуючого середовища));

5.3. **Smart School Project (Проект «Розумні школи»)** проект з технічної кооперації у галузі освіти країн Східно-південної Азії, метою якого є:

5.3.1. Розвиток національних потужностей у галузі Ініціативи «Електронна Азія» (E – Asean initiative);

5.3.2. Сприяння розвитку «Розумних шкіл» – експериментальних майданчиків для переходу у галузі освіти від традиційної моделі навчання до моделі розумних шкіл, що відповідають економіці знань;

5.3.3. Сприяння розвитку «Розумних шкіл» як громадських центрів для проникнення ІКТ у оточуюче школу середовище і як центрів удосконалення системи освіти країни;

5.3.4. Створення платформи для формування глобальної світової освітньої мережі через використання ІКТ і засобів мультимедіа;

5.3.5. Створення електронних медіа-ресурсів для освітніх установ.

На жаль, Україні у галузі промоції математичної і природничої освіти мало чим є похвалитися і якість математичної освіти в Україні у наш час є дуже низькою, більш за те зберігає тенденцію до погіршення.

Висновок

Необхідно провести ревізію стану математичної освіти в Україні у формі громадських слухань, а найкраще – у формі з'їзду вчителів математики України, які б на основі аналізу поточного стану і світових тенденцій у математичній освіті, визначили би пріоритети її розвитку (перш за все, визнання природничо-математичної освіти як національного стратегічного пріоритету), спираючись на традиції фундаментальності, найкращий світовий досвід у запровадженні компетентнісної парадигми природничо-математичної освіти, зокрема використання ІКТ у навчанні математики для комп'ютерного моделювання у середовищах комп'ютерних математичних систем, розробили би дієву Програму пріоритетного розвитку математичної освіти в Україні.

Зауважимо, що в Росії (Москва), на базі МДУ ім. М. Ломоносова 28-30 жовтня 2010 р. відбувся Всеросійський з'їзд вчителів математики Росії, який критично оцінив стан математичної освіти в Росії і намітив шляхи її удосконалення. У роботі конференції взяли участь 1218 учасників з 75 суб'єктів Російської Федерації і інших країн, у тому числі і України: вчителі шкіл, викладачі ВНЗ і вчені-математики, фахівці з педагогіки і методики навчання математики, керівники навчальних закладів і представники органів управляння освітою.

Висновки

1. В Україні розпочато виконання проекту «Електронний підручник», метою якого є створення електронних версій всіх підручників і створення умов для придбання кожним учнем електронної книги «PocketBook». Це є дуже потужний крок у напрямку інформатизації освіти, проте поспіх у планах запровадження викликає сумніви в її успіхах. *Система освіти – це консервативна система і у ній всі зміни повинні бути педагогічно виваженими, перевіреними, підготовленими. Швидко можна тільки руйнувати, про що свідчить порівняння стану сучасної математичної освіти зі станом 90-х років минувшого століття.*
2. Використання електронних підручників є тільки першим кроком інформатизації школи, яка повинна спиратися на оснащення кожного учня (і, зрозуміло, кожного вчителя) повноцінним лептопом з під'єднанням до Інтернет.
3. Прийшов час надати кожному учневі у розпорядження такий потужний засіб пізнання, як КМС – системи динамічної геометрії і комп'ютерної алгебри, і інтегрувати їх у курси математики всіх рівнів від базової школи до вищої;
4. Доцільно започаткувати педагогічний експеримент з упровадження систем КМС у навчальний процес з математики, починаючи з базової школи. В Україні є передумови для успішності такого експерименту:

4.1. Розроблені якісні вітчизняні безкоштовні пакети динамічної геометрії і комп'ютерної алгебри (пакети серії GRAN (Київ, НПУ ім. М.П. Драгоманова, науковий керівник академік НАПНУ М.І. Жалдак), пакет DG (Харків, НПУ ім. Г.С. Сковороди, колектив розробників: д.п.н., професор Раков С.А., к.т.н., доцент Горох В.П., магістр, старший науковий дослідник Осєнков К.О.));

4.2. Розроблені методики використання КМС у навчанні математики:

4.2.1. Підготовлені посібники для вчителів ЗНЗ з використання КМС на уроках математики;

4.2.2. Підготовлені посібники для учнів з питань використання КМС на уроках математики;

4.2.3. Упродовж 6 років майбутні вчителі математики і інформатики багатьох педагогічних університетів України вивчають курси з питань методики використання КМС на уроках математики.

Література

1. Michael D.De Villers, Rethinking Proof with Geometer's Sketchpad, Key Curriculum Press, 2003, 214 p.
2. Mullis I. V. S., Martin M. O., Foy F., Olson J.F., Preuschoff C., Erberber E., Arora A., Galia J. TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades. – TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College, 2008. – 474 p. http://timss.bc.edu/TIMSS2007/PDF/TIMSS2007_InternationalMathematicsReport.pdf
3. Rakov S.A., Gorokh V.P., Explorations in Plane geometry in Cabri and Derive Environment // Vortrage auf der 32. Tagung fur Didactic. – Munchen, 1998. – p. 511-518.